ЭТО – ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.

ЛЕКЦИИ.

ЛЕКЦИЯ #01

010909

Книги:

1. Колмогоров, Фомин. Элементы т.ф. и ф.а.
2. Леонтьева Т.А., В.С. Панферов, Серов В.С. Сборник задач

(1) Задача. l_2 – пространство: $x \in l_2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$;
$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ (сход.) Введем оператор (если с нек. момента $x_k = 0$, то кмп) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$

где $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 < \infty$

кмп: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & & 0 & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & & 0 & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \end{pmatrix}$ Пусть $\|\tilde{A}_n - \tilde{A}_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ (n, m могут быть связаны с размерностью. А может, и нет.)

Существует ли $A = \lim \tilde{A}_n$? Каковы его свойства? A – вполне непрерывный оператор. (Сродни: $r = \frac{p}{q}$ – рац. число; $|r_n - r_m| \to 0$ $n, m \to \infty$; предел, вообще говоря, в $\mathbb{R}$)

- Пусть A – вполне непр. оператор; р-ие $Ax - x = y$ ($x, y \in l_2$) Альт. Фредгольма: либо реш. $\exists!$, либо $Ax - x = 0$ имеет нетрив. решение.) При этом $\dim \operatorname{Ker}(A - E) < \infty$. А вот уже для $Ax = y$ это неверно, вообще говоря. Н/Р: $\int^{x} x(t)\,dt = y(x)$ на $(0, 1)$, где x, y суммир. вместе с квадратом. Не для всякого y есть решение... Как бы $x(t) = \frac{dy}{dt}$ – а это не всегда сущ-т.

А вот такое: $\int_0^t x(\lambda)\, d\lambda - x(t) = y(t)$ - уже хорошо :)

② Метрические пространства. $d(x,y)$ - расстояние:

1) $d(x,y) \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow x = y$ (метод чем угодно)
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ не пусто;

А вот в общем случае все не так; B_n - замк. шар; $B_n \supset B_{n+1}$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ не пусто, если радиусы $\to 0$.

③ Интеграл Лебега. $f_n(x) \in C[0,1]$, ($\Rightarrow$ инт. по Риману)

$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \to 0$ при $n, m \to \infty$. Есть ли предел? Если есть, то интегрируем ли он? Предел есть, но мы его знаем с точностью до множества меры нуль.

Мера-нуль по Лебегу: $E \subset (0,1)$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists (a_n, b_n)$ $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$. Например, таково $\mathbb{Q}$.

5[й] сем

1. Мера Лебега.
2. Измеримые ф-ии
3. Интеграл Лебега.

6[й] сем

4. Метр. пр-ва
5. Банаховы пр-ва.
6. Гильбертовы пр-ва
7. ОНС
8. Вполне непр.
9. Спектр. теория
10. Нелин. операторы
11. Обобщенные ф-ии.

ГЛАВА 1. Мера Лебега.

§1 Кольцо, полукольцо, минимальное кольцо.

X - пр. множество элементов (Н/Р $\mathbb{R}^n$)

Опр. Мн-во K подмножеств X - кольцо, если:

1. $\forall A, B \in K \Rightarrow AB \in K$.
2. $\forall A, B \in K \Rightarrow A \circ B \in K$.

Утв. Если K — кольцо, то $\forall A, B \in K$ $A \cup B \in K$, $A \setminus B \in K$.

Д-во 1) $A \cup B = (A \cap B) \triangle (A \triangle B)$

2) $A \setminus B = (A \triangle B) \cap A$. Ч.Т.Д.

Опр Кольцо K — алгебра, если $X \in K$.

Принцип двойственности. $X \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha})$; $X \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha})$.

Опр. Кольцо K — сигма-кольцо, если $\forall A_1, .., A_k, ... \in K$ верно, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in K$; дельта-кольцо, если $\forall A_1, .., A_k, ... \in K$ верно, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in K$.

· Если K — алгебра, и сигма-кольцо, то K — дельта-кольцо.

Д-во $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k) \right)$. Ч.Т.Д.

Опр. Кольцо $K(A)$ наз-ся минимальным кольцом, порожденным A, если $\forall$ кольца K, т.ч. $A \in K$, верно, что, $K(A) \subset K$.

Теорема. $\forall A \subset X$ существует минимальное кольцо $K(A)$.

Д-во. Возьмем все кольца, содер. A; K_{α} — не пусты и существуют. Положим $K(A) = \bigcap_{\alpha} K_{\alpha}$. Д-м, что оно искомое, т.е. что оно кольцо. 1) $\forall B, B' \in K(A) \Rightarrow$ $\Rightarrow B B' \in K(A)$, 2) $B \triangle B' \in K(A)$. $B, B' \in K(A) \Rightarrow$ $\Rightarrow B, B' \in K_{\alpha}$ $\forall \alpha$; $B \cap B'$, $B \triangle B' \in K_{\alpha}$ $\forall \alpha$, т.к. K_{α} — кольцо; но тогда $B B'$, $B \triangle B' \in \bigcap_{\alpha} K_{\alpha}$. Ч.Т.Д.

Опр. Мн-во подм-в X по имени P — полукольцо, если:

1.) $\forall A, B \in P \Rightarrow AB \in P$.

2) $\forall A, B \in P, B \subset A \Rightarrow \exists A_1, .., A_k$, и $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ где $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ (тогда $\cup$ становится $\sqcup$)

Пример. $P = \{[a, b)\}$ — полукольцо, но не кольцо.

30909

ЛЕКЦИЯ #02

Лемма. $\forall A, B_1 \dots B_n \in P$ (полукольцо) $\Rightarrow \exists A_1, \dots, A_m$ (попарно непер.), $A_i A_j \overset{i \neq j}{=} \varnothing$, т.ч. $A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigsqcup_{k=1}^{m} A_k$.

Д-во. Индукция. Базис, $n=1$: $A \setminus B : A, B \in P$; $A \setminus B = A \setminus \underbrace{AB}_{\in P}$, $AB \subset A$, и по опр. полукольца $\exists A_k : A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ $(A_k \in P)$

Шаг; n-произвольно; $A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i$, $A_i \in P$. Докажем для $n+1$. $A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n+1} B_k = (A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k) \setminus B_{n+1} = (\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k) \setminus B_{n+1}$

$= \bigsqcup_{k=1}^{m} (A_k \setminus B_{n+1}) = \bigsqcup_{k=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{n_j} C_{kj}$, $C_{kj} \in P$. Ч.Т.Д.

Теорема. Пусть P-полукольцо; $K(P)$ — минимальное кольцо, порожденное P. Тогда $\forall A \in K(P)$ $\exists B_i \in P$, $i = \overline{1,n}$, и $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$

Д-во $K = \{\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i, B_i \in P\}$. Д-м, что K-кольцо, тогда все будет д-но.

1) Д-м, что если $A, B \in K$, то $A \cup B \in K$. Если $AB = \varnothing$, то это очевидно. Иначе, д-м, что $A \setminus B \in K$.

а) $A = C$, $C \in P$; $B = \bigsqcup_{i=1}^{n'} B_i'$, $B_i' \in P \Rightarrow C \setminus (\bigsqcup_{i=1}^{n'} B_i') = \bigsqcup_{j=1}^{m} A_j$ (из леммы). Значит, $C \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n'} B_i' \in K$, т.е. $A \setminus C \in K$.

б) $\forall A, A' \in K$; $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$, $B_i \in P$, $A' = \bigsqcup_{i=1}^{n'} B_i'$

$$A \setminus A' = (\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i) \setminus A' = \bigsqcup_{i=1}^{n} (B_i \setminus A') = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{n_i} A_{ij}, \; A_{ij} \in P.$$

$\forall A, A' \in K$: $A \cup A' = A \sqcup \underbrace{(A' \setminus A)}_{\in K} \in K$.

2) $\forall A, A' \in K$; $A \triangle A' = \underbrace{(A \setminus A')}_{\in K} \cup \underbrace{(A' \setminus A)}_{\in K} \in K$

Значит, осталось д-ть пересечение.

3) $\forall A, A' \in K$; $AA' = (A \cup A') \triangle (A \triangle A') \in K$. Ч.Т.Д.

Пример. $P = \{[a,b)\}$; $K(P) = \{\bigsqcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k)\}$

§2 Мера. Общее определение.

Опр. Пусть P — полукольцо, $\forall B \in P$ ставится в соотв. число $m(A)$, т.ч.: 1) $m(A) \geq 0$

2) Если $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ и $A, A_k \in P$, то $m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$

Тогда $m(A)$ — мера на полукольце P.

Пример. 1) $P = \{[a,b)\}$. $m(A) = b - a$

2) $F(x)$ — неубыв. ф-я; $m_F(A) = F(b) - F(a)$. Причем по мере можно восстановить ф-ю: $F(x) = \begin{cases} m[0,x) & x > 0 \\ -m[0,x), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \text{ (требуем!)} \end{cases}$
(если требовать, например, $F(0) = 0$)

Опр. $\overset{\text{Мера}}{m}(A)$, $A \in P$ — сигма-аддитивная мера, если $\forall A, A_k$, $A_i A_j \overset{i \neq j}{=} \varnothing$
$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$

Пример. $X = [-1, 0\ 1)$, $F(x) = \operatorname{sgn}(x)$; $[-1, 0) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1})$
Пусть $m_F[a,b) = [a,b)$; $m_F[-1,0) = F(0) - F(-1) = 0 - (-1) = 1$.
$m_F[\frac{-1}{n+1}, -\frac{1}{n}) = F(-\frac{1}{n}) - F(\frac{-1}{n+1}) = 0$. Нет сигма-аддитивности!

Утв. Если $B \subset A$, $B, A \in P$, $m(A)$ — мера на P, то $m(B) \leq m(A)$.

Д-во. Раз $B \subseteq A$, то $\exists A_k \in P$, т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$; $A = B \sqcup (A \setminus B) = B \sqcup (\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) \Rightarrow m(A) = m(B) + \sum_{k=1}^{n} \overset{\geq 0}{m(A_k)}$. Ч.Т.Д.

Замечание $B \subset A$, $A, B \in K$, то $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$

Д-во $A = B \sqcup (B \setminus A)$. Ч.Т.Д.

Опр. Мера $m(A)$, заданная на кольце K, наз-ся непрерывной на нём, если $\forall A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots \subseteq A_n \subset \ldots$, $A_k \in K$, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in K$, и $m(A) = \lim_{k \to \infty} m(A_k)$

Теорема. Мера $m(A)$, заданная на кольце K, непрерывна $\Leftrightarrow$ она сигма-аддитивна.

Док-во ($\Rightarrow$) $\exists\, A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$; $A, A_k \in K$. Положим $B_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$; $B_n \in K$; $B_n \subset B_{n+1}$ $\forall n$; $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \xRightarrow{\text{м непр.}} m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[m\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)\right] \Rightarrow m(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)$.

($\Leftarrow$) $\exists\, A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots A_n \subset \ldots$; $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, причем $A, A_k \in K$.

Представим $A = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_3 \setminus A_2) \ldots$

$A_n \setminus A_{n+1} \in K$; В силу сигма-аддитивности, $m(A) = m(A_1) + m(A_2 \setminus A_1) + m(A_3 \setminus A_2) + \ldots$;

$m(A) = m(A_1) + \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} m(A_{n+1} \setminus A_n) = m(A_1) + \lim\limits_{m\to\infty}\left[m(A_2) - m(A_1) + m(A_3) - m(A_2) + \ldots + m(A_{m+1} \setminus A_m)\right] = \lim\limits_{m\to\infty} m(A_m)$. Ч.Т.Д.

Замечание. Если $m(A)$ задана на кольце K и она непр-на, то $\forall A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$; $A_k \in K$, $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A \in K$, то $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$. Верно и обратное.

080909

ЛЕКЦИЯ #03

§3 Продолжение меры с ПК на МК.

Опр. $P \subseteq K$ — кольцо, P — полукол.; $m(A)$ — мера на K, $m(B)$ — мера на P. $m(A)$ — продолжение $m(A)$ с P на K, если $m(A) = m(A)$ $\forall A \in P$.

Теорема. Пусть P — П.К; $K(P)$ — М.К; $m(A)$ — мера, заданная на P. Тогда $\exists!$ продолжение меры $m(A)$ на $K(P)$. Если $m(A)$ сигма-аддитивна на P, то продолжение тоже сигма-аддитивно.

D-во. 1) $\forall A \in K(P)$ $\exists B_i \in P$, т.ч. $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ (в силу структуры МК)

Пусть $m(A)$ — продолжение меры; тогда $m(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(B_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(B_k)$. Однако выбор B_k неоднозначен зависит ли $\mu(A)$ от выбора B_k? Д-м, что нет. Пусть $A=\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B'_j$; $B_i, B'_j \in P$. Представим $B_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_i B'_j$; $m(B_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} m(B_i B'_j)$; $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} m(B_i B'_j) = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} m(B_i B'_j)$. Однако $B'_j = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i B'_j$, значит $m(B'_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(B_i B'_j)$, и $\mu(A) = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{m} m(B_i B'_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} m(B'_j)$. Значит, все корректно.

г) Покажем, что $\mu(A)$ – мера. $\mu(A) \geq 0$ – очевидно. Аддитивность: $\forall A \in K(P) \Rightarrow A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in K(P)$, надо д-ть, что $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. $A_k \in K(P) \Rightarrow \exists B_{ki} \in P$, т.ч. $A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n_k} B_{ki}$. Тогда $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n}\bigsqcup\limits_{i=1}^{n_k} B_{ki}$; $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n_k} m(B_{ki})$; $\mu(A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n_k} m(B_{ki}) \Rightarrow$ аддитивность есть!

з) Проверим сигма-аддитивность $\mu(A)$ (в предположении, что $m(A)$ сигма-аддит-на): $\forall A \in K(P)$, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in K(P)$. Пусть $A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n_k} B_{ki}$; $B_{ki} \in P$, и $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B'_j$; $B'_j \in P$, значит, $\mu(A) = \sum\limits_{j=1}^{m} m(B'_j)$; $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigsqcup\limits_{i=1}^{n_k} B_{ki}$;

$B'_j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigsqcup\limits_{i=1}^{n_k} B_{ki} B'_j \Rightarrow m(B'_j) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k} m(B_{ki} B')$;

$\mu(A) = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k} m(B_{ki} B'_j) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k}\sum\limits_{j=1}^{m} m(B_{ki} B'_j)$

$B_{ki} = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_{ki} B'_j \Rightarrow m(B_{ki}) = \sum\limits_{j=1}^{m} m(B_{ki} B'_j) \Rightarrow \mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k} m_k(B_{ki}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Ч.Т.Д.

§4 Теорема.

Теорема. K – кольцо; $m(A)$ задана на K; $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$, A и $A_k \in K$.

Тогда: 1) $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(A)$;

2) Если $m(A)$ сигма адд-на, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A$, A и $A_k \in K$, то $m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$. (Причем если m не сигма адд-на, то это, вообще говоря, не верно.)

Д-во. 1) $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$; $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ $\forall n \in \mathbb{N}$; но уже $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \in K$, так что

$m\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq m(A)$ $\forall n$, т.е. $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A)$ $\forall n$.

Устремляем $n \kappa \infty$: $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(A)$.

2) Если $m = m_F$, $F(t) = \operatorname{sgn} t$; р-м $[-1,0) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right)$,

$[-1,0) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{-1}{n+1}\right)$; $m_F[-1,0) = 1$, $m_F\left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right) = 0$

Так что сигма-аддитивность нужна! Итак, пусть она есть. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\underbrace{AA_k}_{\in K}) \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$; $\tilde{A}_k = AA_k \in K$. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k =$

$= \tilde{A}_1 \sqcup (\tilde{A}_2 \setminus \tilde{A}_1) \sqcup (\tilde{A}_3 \setminus (\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2)) \sqcup \ldots$ В силу σ-адд-ти, имеем: $m(A) = m(\tilde{A}_1) + m(\tilde{A}_2 \setminus \tilde{A}_1) + m(\tilde{A}_3 \setminus (\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2)) + \ldots \leq m(\tilde{A}_1) + m(\tilde{A}_2) + m(\tilde{A}_3) + \ldots \leq$

$\leq m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + \ldots$ Ч.Т.Д.

$P = \{[a,b)\}$; $m[a,b) = b - a$ – длина.

Теорема. Длина сигма-аддитивна на $P = \{[a,b)\}$

Д-во. $\forall A \in P$, $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in P$; д-м, что $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$

$A = [a,b)$, $A_k = [a_k, b_k)$; т.е. надо д-ть, что $b - a = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$. По теореме мы знаем, что верен знак $\geq$; д-м, что и $\leq$ тоже верно. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$; $[a, b - \frac{\varepsilon}{2}] \subset [a,b) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k) \subset$

$\subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}; b_k) \Rightarrow [a, b-\frac{\varepsilon}{2}] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k)$ По лемме Гейне - Бореля: $[a, b-\frac{\varepsilon}{2}] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m}[a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k)$; т. е.

$$[a, b-\frac{\varepsilon}{2}) \subset [a, b-\frac{\varepsilon}{2}] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m}(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m}[a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k)$$

$$m[a, b-\frac{\varepsilon}{2}) \leq \sum_{k=1}^{m} m[a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m[a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k);$$

$$b-a-\frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}}_{\varepsilon} \Rightarrow b-a \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) + \frac{3\varepsilon}{2}$$

В силу произв. ε, Ч.Т.D.

§5 Мера Лебега.

] K - алгебра элементарных множеств; На ней задана сигма - адд. мера $m(A)$.

Опр. Верхняя мера: $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$, $B_k \in K$, $A \subset X$

Считаем, что $m(X) < \infty$.

Утв. Если $A \in K$, то $\mu^*(A) = m(A)$.

D-во $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$; т.к. $A, B_k \in K$, то по теореме $m(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(B_k)$

$\Rightarrow m(A) \leq \inf\limits_{\text{по } B_k \text{ покрыв.}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(B_k) = \mu^*(A)$. Обратно: $A \subseteq A$ (факт.)

Значит, $\mu^*(A) \leq m(A)$. Ч.Т.D.

Опр. Множество $A \subset X$ измеримо по Лебегу, если $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$. В этом случае, мерой Лебега наз-ся число $\mu(A) = \mu^*(A)$

Замечание. Если A изм. по Лебегу, то и $X \setminus A$ измер. по Лебегу.

Опр. Нижняя мера: $\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A)$

Утв. A - измеримо $\Leftrightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$.

ЛЕКЦИЯ #04

100909

Теорема. Пусть $A, A_k \subset X$; $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)$.

D-во. $\forall \varepsilon > 0$; $\exists B_{k_i} \in K$; $A_k \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_{k_i}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(B_{k_i}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$, $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_{k_i}$; тогда $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(B_{k_i}) \leq$

$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(m^*(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)+\varepsilon$. В силу произвольности ε, $m^*(A)\leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$. Ч.Т.D.

Следствие ① $m_*(A)\leq m^*(A)$.

D-во. $X=A\sqcup X\setminus A \Rightarrow X\subseteq A\cup(X\setminus A)\Rightarrow m^*(X)\leq m^*(A)+m^*(X\setminus A)$
$\Rightarrow m(X)-m^*(X\setminus A)\leq m^*(A)\Rightarrow m_*(A)\leq m^*(A)$. ЧТD.

② $m_*(A)\geq 0$.

D-во $X\setminus A\subseteq X$; По теореме, $m^*(X\setminus A)\leq m^*(X)\Rightarrow m^*(X\setminus A)\leq m(X)\Rightarrow$
$\Rightarrow m(X)-m^*(X\setminus A)\geq 0\Rightarrow m_*(A)\geq 0$. Ч.Т.D.

③ $\forall A, C\subseteq X\Rightarrow |m^*(A)-m^*(C)|\leq m^*(A\triangle C)$

D-во. $A\subset C\cup(A\triangle C)$ (это легко проверить для $\forall A, C$). По теореме, $m^*(A)\leq m^*(C)+m^*(A\triangle C)\Rightarrow m^*(A)-m^*(C)\leq$ $\leq m^*(A\triangle C)$; Т.к. $C\subset A\cup(A\triangle C)$, то аналогично получаем $m^*(C)-m^*(A)\leq m^*(A\triangle C)\Rightarrow |m^*(A)-m^*(C)|\leq m^*(A\triangle C)$.
Ч.Т.D.

Замечание. Расстояние от A, B можно ввести как $d(A,B)=m^*(A\triangle B)$

Свойства метрики:
1. $d(A,B)\geq 0$, $=0 \Leftrightarrow A=B$
2. $d(A,B)=d(B,A)$.
3. $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$

Третье свойство следует из того, что $A\triangle B\subset(A\triangle C)\cup(C\triangle B)$, (это тоже легко проверить), т.е. $m^*(A\triangle B)=m^*(A\triangle C)+m^*(C\triangle B)$.

Лемма. Если $m^*(A)=0$, то A измеримо по Лебегу, и $m(A)=0$.

D-во. Из следствия, $0\leq m_*(A)\leq m^*(A)=0\Rightarrow m_*(A)=m^*(A)$
$\Rightarrow A$ измеримо, $m(A)=0$. Ч.Т.D.

Замечание. Если $A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, $m^*(A_k)=0$, то A измеримо, и $m(A)=0$.

D-во. Из теоремы, $m^*(A)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m^*(A_k)=0\Rightarrow m^*(A)=0$. Ч.Т.D.

Замечание. $\forall$ подмн-во множества меры нуль измеримо и имеет меру, равную нулю

Док-во. A-изм, $m(A)=0$, $E\subset A$. По теореме, $m^*(E)\leq m^*(A)=0$

$\Rightarrow \mu(E)=0$, оно измеримо. Ч.Т.Д.

Опр. Мера называется полной, если любое подмножество мн-ва меры нуль измеримо и имеет меру, равную нулю.

· Мера Лебега – полная мера.

Пример. $\mathbb{Q}$ – мн-во рациональных точек; $\mathbb{Q}[0,1]$ – на $[0,1]$; $P=\{[a,b)\}$, $m[a,b)=b-a$; $K=K(P)$, $[0,1]\in K \Rightarrow K$ – алгебра, $m(B)$ – сигма-аддитивная мера. Мера $\mathbb{Q}[0,1]$ равна нулю: r_k-ю рац. точку накроем интервальчиком $[r_k, r_k+\frac{\varepsilon}{2^k}) \equiv B_k$.
$\{r_k\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$; $\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \le \varepsilon \Rightarrow \mu^*(\mathbb{Q}[0,1])=0$.

§6 Критерий измеримости по Лебегу.

Теорема. $A\subset X$ из-мо по Лебегу $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists B\in K$, и $\mu^*(A\triangle B)<\varepsilon$

Д-во. 1) Достаточность. $A\subset X$, $\forall\varepsilon>0\ \exists B\in K$, $\mu^*(A\triangle B)<\varepsilon$. Из следствия 3:
$|\mu^*(A)-\mu^*(B)| \le \mu^*(A\triangle B)<\varepsilon$; $|\mu^*(X\setminus A)-\mu^*(X\setminus B)| \le$
$\le \mu^*[(X\setminus A)\triangle(X\setminus B)]<\varepsilon$, т.к. $A\triangle B=(X\setminus A)\triangle(X\setminus B)\ \forall A,B$.

$-\varepsilon \le \mu^*(A)-\underbrace{\mu^*(B)}_{m(B)} \le \varepsilon$; $-\varepsilon \le \mu^*(X\setminus A)-\underbrace{\mu^*(X\setminus B)}_{m(X\setminus B)} \le \varepsilon$

Сложим:
$$-2\varepsilon \le \mu^*(A)+\mu^*(X\setminus A)\underbrace{-m(B)-m(X\setminus B)}_{-m(X)} \le 2\varepsilon$$

$|\mu^*(A)+\mu^*(X\setminus A)-m(X)| \le 2\varepsilon \xRightarrow{\text{в силу произв. } \varepsilon} \mu^*(A)+\mu^*(X\setminus A)=$
$=m(X) \Rightarrow A$ – измеримо.

2) Необходимость. $\forall\varepsilon>0$ д-м, что существует $B\in K$, т.ч. $\mu^*(A\triangle B)<\varepsilon$. $\exists B_i\in K: \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset A$, $\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) \le \mu^*(A)+\frac{\varepsilon}{3}$;

$A\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \underbrace{B_1}_{=\tilde B_1} \sqcup \underbrace{(B_2\setminus B_1)}_{\tilde B_2} \sqcup (B_3\setminus(B_1\cup B_2)) \sqcup \ldots \sqcup \tilde B_i \sqcup \ldots$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde B_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} m(\tilde B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) \le \mu^*(A)$

Значит, $\exists M: \sum_{i=M}^{\infty} m(\tilde B_i) < \varepsilon/3$ (Ибо сходится)

Положим $B=\bigsqcup_{i=1}^{N} \tilde B_i$, $B\in K$.

а) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; $A \setminus B \subset \left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i \right) \setminus B = \bigsqcup_{i=N+1}^{\infty} \tilde{B}_i$,

значит, по теореме $\mu^*(A \setminus B) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} m(\tilde{B}_i) + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^*(A \setminus B) < \varepsilon/3$.

б) $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$, $X \setminus A$ измеримо, ибо A измеримо.

По опред. верхней меры, $\exists\, C_j \in K$, т.ч. $X \setminus A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$,

и $\sum_{j=1}^{\infty} m(C_j) \leq \mu^*(X \setminus A) + \varepsilon/3$

Итак, $B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \subset B \cap \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right] \in \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j B$

В силу теоремы, $\mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_j B) = \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j B) =$

$= \sum_{j=1}^{\infty} \left[m(C_j) - m(C_j \setminus B) \right] \leq \mu^*(X \setminus A) + \frac{\varepsilon}{3} - \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j \setminus B)$

$(AB) \sqcup (A \setminus B) = A$; $m(A) = m(AB) + m(A \setminus B)$

$X = A \sqcup (X \setminus A) \subset \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} (C_j \setminus B) \Rightarrow$

по теореме, $m(X) = \mu^*(X) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(\tilde{B}_i) + \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j \setminus B)$

счётные аддит.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j \setminus B) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j \setminus B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(X \setminus A) + \varepsilon/3 + \mu^*(A) - m(X) + \varepsilon/3 =$

$= m(X) - m(X) + \frac{2\varepsilon}{3}$. В итоге, $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Ч.Т.Д.

ЛЕКЦИЯ #05

Следствие. A измеримо, если $\forall \varepsilon > 0$ сущ измер. C, т.ч. $\mu^*(A \triangle C) < \varepsilon$.

Док-во C - измеримо $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, B \in K$, $\mu^*(C \triangle B) < \varepsilon$. Воспользуемся тем, что $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$ $\forall A, B, C$. Значит, $\mu^*(A \triangle B) \leq$

$\leq \underbrace{\mu^*(A \triangle C)}_{\varepsilon} + \underbrace{\mu^*(C \triangle B)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$. $\Rightarrow A$ - измеримо. Ч.Т.Д.

Теорема. Если A_1, A_2 - измеримы, то $A_1 A_2$, $A_1 \cup A_2$, $A_1 \setminus A_2$, $A_1 \triangle A_2$ тоже измеримы. (Измеримые мн-ва образуют алгебру.)

Док-во. 1) $\forall \varepsilon>0 \ \exists$ эл. $B_1, B_2 \in K$, т.ч. $\mu^*(A_i \triangle B_i) < \varepsilon$, $i=1,2$. Т.к. $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ $\forall A_i, B_i$, то

$\mu^*((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)) \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < 2\varepsilon$.

Тогда $B_1 \cup B_2 \in K \Rightarrow A_1 \cup A_2$ измеримо по крит. измеримости.

2) $A_1 A_2 = X \setminus [\underbrace{(X \setminus A_1)}_{\text{изм}} \cup \underbrace{(X \setminus A_2)}_{\text{изм}}]$. А дополнение измеримо. $\Rightarrow$ $\Rightarrow A_1 A_2$ измеримо

3) $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2)$

4) $A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 - A_1)$. Ч.Т.D.

Теорема. $\mu^*(A)$ – мера на измеримых по Лебегу множествах.

D-во Надо лишь показать, что $\forall A_1 A_2$ – измер, $A_1 A_2 = \emptyset$, верно, что $\mu^*(A_1 \sqcup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Пусть $A = A_1 \sqcup A_2$. (оно измер.) Т.к. $A \subset A_1 \sqcup A_2 \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Теперь – в другую сторону: $\forall \varepsilon>0$ существ. $B_i \in K$, т.ч. $\mu^*(A_i \triangle B_i) < \varepsilon$. $A_i \subset B_i \cup (A_i \triangle B_i)$; $\Rightarrow \mu^*(A_i) \leq \mu^*(B_i) + \mu^*(A_i \triangle B_i) \leq m(B_i) + \varepsilon$. Значит, $\mu(A_1) + \mu(A_2) \leq m(B_1) + m(B_2) + 2\varepsilon = m(B_1 \cup B_2) + m(B_1 \cap B_2) - 2\varepsilon$. $B_1 \cup B_2 \subseteq (A_1 \sqcup A_2) \cup [A_1 \sqcup A_2] \triangle (B_1 \cup B_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu^*(B_1 \cup B_2) \leq \mu^*(A_1 \sqcup A_2) + \mu^*([A_1 \sqcup A_2] \triangle [B_1 \cup B_2])$

$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$. В итоге, $\overset{m}{\underset{}{\overset{\shortparallel}{\mu^*}}}(B_1 \cup B_2) \leq$ $\leq \mu^*(A) + 2\varepsilon$. Значит, $m(A_1) + m(A_2) \leq \mu^*(A) + 4\varepsilon + m(B_1 B_2)$

Отметим, что $B_1 B_2 \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ при $A_1 A_2 = \emptyset$ и любых B_1, B_2. Тогда $\underset{\underset{m}{=}}{\mu^*}(B_1 B_2) \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) \leq 2\varepsilon$.

$\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \leq \mu^*(A) + 6\varepsilon$. В силу произвольности ε, $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \leq \mu^*(A)$. Окончательно, $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Ч.Т.D.

Следствие. $\mu^*(A)$ – сигма-аддитивная мера на измер. по Лебегу мн-вах.

Док-во. Пусть $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$; A, A_i измеримы по Лебегу; $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow$ $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. В другую сторону: $\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) \leq$ $\leq \mu^*(A)$. Значит, $\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. Ч.Т.D.

Теорема Пусть A_i — измеримо; тогда $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — измеримо.

Док-во. $A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \ldots = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i$, $\tilde{A}_i$ измеримые. $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i \subset X \Rightarrow \bigsqcup_{i=1}^{n} \tilde{A}_i \subset X \Rightarrow \mu^*(\bigsqcup_{i=1}^{n} \tilde{A}_i) \leq \mu^*(X) = m(X) < \infty$. Устремим n к ∞: $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(\tilde{A}_i) \leq m(X) < \infty$.

Значит, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu^*(\tilde{A}_i) < \varepsilon$; Пусть $C = \bigsqcup_{i=1}^{N} \tilde{A}_i$ — измеримо.

$A \triangle C = (A \setminus C) \cup \underset{\emptyset}{(C \setminus A)} = \bigsqcup_{i=N+1}^{\infty} \tilde{A}_i$. Тогда $\mu^*(A \triangle C) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu^*(\tilde{A}_i) < \varepsilon$. По следствию, A — измеримо. Ч.Т.Д.

Следствие. Если A_i измеримо, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ измеримо.

Док-во $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)\right]$. Ч.Т.Д.

Следствие. Измеримые по Лебегу множества образуют сигма-алгебру.

§7 Случай $m(X) = +\infty$.

Опр. Мера μ называется сигма-конечной, если существуют такие $X_i \in R$, $\mu(X_i) < \infty \; \forall i$, $X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} X_i$

Опр. Множество A наз-ся измеримым по Лебегу, если $\forall i$ измеримы множества AX_i; мерой A называется число $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(AX_i)$.

• Отметим, что в определении не требуется однозначность представления X через X_i: если $X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} X_i$, $X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} X'_j$; $X_i = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} X_i X'_j$, и $X'_j = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} X'_j X_i$. Тогда $\mu(X_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(X_i X'_j)$ и всё очевидно.

§8 Мера Жордана.

$\mu^*_L = \inf\limits_{A \subset \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i} \sum m(B_i)$; $\mu^*_J = \inf\limits_{A \subset \bigsqcup_{i=1}^{N} B_i} \sum m(B_i)$; $\mu_{*J}(A) = m(X) - \mu^*_J(X \setminus A)$

Лебега — Жордана (Считаем, что $m(X) < \infty$)

Утв. $\mu^*_L(A) \leq \mu^*_J(A)$.

Опр A — измеримо по Жордану, если $\mu^*_J(A) = \mu_{*J}(A)$.

Утв. $\mu_{*J}(A) \leq \mu_{*L}(A)$.

Теорема. $\mu_{*J}(A) \leq \mu_{*L}(A) \leq \mu^*_L(A) \leq \mu^*_J(A)$.

Следствие. Если A изм. по Жордану, то оно изм. по Лебегу и меры равны.

Пример. Мн-во измеримо по Лебегу, но не Жордану. $E = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ на $[0,1) = X$. Накрываем: $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [r_k, r_k + \frac{\varepsilon}{2^k})$; $\sum_{k=1}^{\infty} m[r_k, r_k + \frac{\varepsilon}{2^k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \Rightarrow \mu^*_L(E) = 0 \Rightarrow E$ измеримо, $\mu_L(E) = 0$

Аналогично, $\mu^*_J(E) = 1$, $\mu_{*J}(E) = 0$.

§8 Канторово множество. Пример неизмеримого множества.

$X = \mathbb{R}$; Эл. множества: $\bigsqcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = B$; По Лебегу тогда измеримы:

1) $[a, b)$;
2) (a, b) (ибо $(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b)$);
3) $\{a\} = [a, b) \setminus (a, b)$;
4) $\forall$ открытое множество на $\mathbb{R}$ (ибо оно представимо в виде счетного объединения интервальчиков. Непересекающихся.)

$$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ №06}}$$ 170909

Д-во $\forall x \in G \; \exists (\alpha, \beta) \subset G$, $x \in (\alpha, \beta)$; пусть $a = \inf_{x \in (\alpha,\beta) \subset G} \alpha$, $b = \sup_{x \in (\alpha,\beta) \subset G} \beta$

А лежит ли (a, b) в G? Пусть $a < y < x$. Т.к. $y > a$, а $\exists$ то $\inf$, то $\exists \alpha: a < \alpha < y < x$, и $(\alpha, \beta) \subset G$, $x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow y \in G$.

Меж тем, попарно непересек. интервалов не более чем счетное число;
$G = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$. Ч.Т.Д.

Следствие. Любое открытое $G \subset \mathbb{R}$ - измеримо.

Лемма. $\forall$ откр. $G \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу.

Д-во $\forall$ отр. G Разобьем $\mathbb{R}_n$ на кубики со стороной $\frac{1}{2^n}$; назовем их Δ_{nk}. $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{0k} \subset G$ (берем только те, что попали в G)

Уменьшим шаг, $n = 1$; добавим новые: Δ_{1k}, $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1k} \subset G$

и т.д.; $\bigsqcup_{n=0}^{\infty}\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\Delta_{nk} \subset G$. Д-м, что совпадают. $\forall x \in G$ $\exists B(x,r) \subset G$ Есть кв-т, в который x попадёт. По-любому. ЧТД

Канторово множество.

$[0,1]$. 1) $[0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = A_1$

2) $A_1 \setminus (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \bigsqcup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ и т.д

$$K = [0,1] \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$ - канторово множество. Оно замкнуто как дополнение открытого. Пусть $\mu(a,b) = b-a$;

$$\mu[0,1] = \mu(K) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(a_k, b_k)$$

$$1 = \mu(K) + \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots\right] = \mu(K) + 1 \Rightarrow \mu(K) = 0.$$

Д-м, что K имеет мощность континуума. Троичная система исчисления: 0, 1, 2.

1) $0,0\dots$ и $0,02\dots$

2) $0,00\dots$ и $0.02\dots$, $0,20\dots$, $0.22\dots$

и т д.

Таким образом, все точки имеют вид "без единицы"

$0.202 \longleftrightarrow 0.101$ - а их континуум.

~~Лемма.~~

Борелевские множества и мера.

G_k - открытые из $\mathbb{R}^n$; $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = E$

Опр. Борелевское мн-во - мн-во, получаемое из открытых путем счетного объединения или пересечения.

Утв. Борелевские мн-ва измеримы по Лебегу. ; $\mu_B(A) = \mu_L(A)$, где A - борелев. множество. Борелев мера сигма-аддитивна; бор. множества образуют сигма-алгебру.

Утв. Борелевская мера не полна.

Д-во. Мощность всех бор. множеств - континуум в $\mathbb{R}^1$ (вообще и в $\mathbb{R}^n$)

$\forall G \subset \mathbb{R}$, G - откр, $G = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$; $G \leftrightarrow \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$

1) $a_i \in \mathbb{R}$, их континуум.

2) $\{a_1 \dots a_n \dots\}$ $a_i \in \mathbb{R}$ - континуум;

3) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$ - континуум $\Rightarrow$ мощность бор. множеств - континуум.

K, очевидно, по Борелю измеримо; мера Лебега $= 0 \Rightarrow$ мера Бореля равна нулю; возьмем 2^K - множество всех подмножеств K, они гиперконтинуум; $\mu_L(A) = 0$ $\forall A \in 2^K$. Значит, существуют неборелевские множества. Ч.Т.D.

<u>Пример неизмеримого по Лебегу мн-ва</u>

Возьмем $[-1/2; 1/2]$; $\exists x \in [-1/2, 1/2]$, класс $K(x) = \{y \in [-1/2, 1/2] \mid y - x \in \mathbb{Q}\}$

<u>Утв.</u> Класс K_x либо равен K_z, либо $K_x K_z = \varnothing$.

<u>D-во</u> $K_x K_z \neq \varnothing \Rightarrow \exists y \in K_x, y \in K_z \Rightarrow \begin{cases} y - x = r_1 \\ y - z = r_2 \end{cases}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q})$ $\quad x - z = \overset{\mathbb{Q}}{\overline{r_2 - r_1}} \Downarrow z \in K_x \Rightarrow K_x = K_z$.

Ч.Т.D.

Берем все различные K_x, берем по одному представителю из каждого; получим мн-во M.

<u>Утв.</u> M - неизмеримо по Лебегу.

<u>Док-во.</u> Возьмем $[-1, 1]$; занумеруем все рац. точки оттуда: $r_1, \dots, r_k, \dots$ $\{M + r_k\} = \{y \in M : y + r_k\}$. $\{M + r_k\} \cap \{M + r_{k'}\} = \varnothing$ при $r_k \neq r_{k'}$. Ясно, что $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \{M + r_k\} \subset [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$; и что $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \{M + r_k\} \supset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Пусть M - измеримо.

1. Если $\mu(M) = 0$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} M + r_k) = 0$. Но вложенность?!

2. $\mu(M) > 0 \Rightarrow \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \{M + r_k\}) = \infty$. (?!) Ч.Т.D

(ибо $\mu\{M + r_k\} = \mu\{M + r_s\}$)

09.09

ЛЕКЦИЯ #07

Завершим д-во $\exists$ н.в.

1) $\{M+r_k\} \cap \{M+r_j\} = \varnothing$, $k \neq j$. Пусть $\exists\ z \in \{M+r_k\} \cap \{M+r_j\} \Rightarrow \begin{matrix} z = x + r_k \\ z = y + r_j \end{matrix}$ где $x, y \in M$; $\Rightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ (?!)

2) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \{M + r_k\}$. Пусть $z \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Д-м, что $\exists K_x : z \in K_x$. (это очевидно.) Пусть $y \in M$, $y \in K_x$. $z \in K_x \Rightarrow z - x = r \in \mathbb{Q}$; $y - x = r'$; $z - y = r - r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ лежит :) Совсем Ч.Т.Д.

Теорема. Пусть A-изм по Лебегу; мера μ- порождённая мера; тогда существует борел. мн-во C, и $\mu(A) = \mu(C)$.

Док-во. Д-м в одномерном случае; но верно и в многомерном.

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ борел. $A \subset C$ и $\mu(A) \leq \mu(C) \leq \mu(A) + \varepsilon$.

Докажем это $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} \sum m(B_i) = \inf\limits_{A \subset \bigcup (a_i, b_i)} \sum m[a_i, b_i)$

1.2) Расширим интервальчики: $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, b_i\right)$

1.1) Возьмем a_i, b_i такие, что $\sum_{i=1}^{\infty} m(a_i, b_i) \leq \mu(A) + \varepsilon$.

$\sum_{i=1}^{\infty} m\left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^i}, b_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m[a_i, b_i) + \varepsilon$; При этом $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^i}, b_i\right)$; $\sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^i}, b_i\right) \leq$
$\leq \sum_{i=1}^{\infty} m[a_i, b_i) + \varepsilon \leq \mu(A) + 2\varepsilon$.

2) Выберем последовательность $\varepsilon_n \to 0$ монотонно; $\forall \varepsilon_n$ $\exists$ борр. $C_n \supset A$, $\mu(C_n) \leq \mu(A) + \varepsilon_n$. Положим $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ - бор. мн-во; $A \subseteq C$. Раз $A \subset C$, то $\mu(A) \leq \mu(C)$; $C \subset C_n \Rightarrow \mu(C) \leq \mu(C_n)$ $\forall n$; $\mu(C_n) \leq \mu(A) + \varepsilon_n \Rightarrow \mu(C) \leq \mu(A) + \varepsilon_n$ $\forall n$. Устремим n к ∞: $\mu(C) \leq \mu(A)$. $\Rightarrow \mu(A) = \mu(C)$. Ч.Т.Д.

§9 Мера Лебега-Стилтьеса.

Рассмотрим одномерный случай. $m[a, b) = F(b) - F(a)$, где $F(t)$ - неубывающая функция.

<u>Теорема.</u> P - полукольцо стрелок; $m[a, b) = F(b) - F(a)$. Тогда, мера m_F сигма-аддитивна на $P \Leftrightarrow F$ непр. слева в $\forall$ точке.

<u>Д-во.</u> $(\Rightarrow)$ m_F - сигма-адд-на; д-м непрерывность. $\forall t \in \mathbb{R}$ построим $t_n \le t$, $t_n \to t$, $t_n \le t_{n+1}$ $\forall n$; $[t_n, b) \supset [t_{n+1}, b)$

Т.к. мера сигма-аддитивна, то она непрерывна $\Rightarrow m_F\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[t_n, b)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} m_F[t_n, b) = \lim\limits_{n\to\infty}(F(b) - F(t_n))$; но $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[t_n, b) = [t, b)$ и $m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[t_n, b)\right) = m_F[t, b) = F(b) - F(t)$. <u>Замечание.</u> Если $\tilde{t}_n \le t$ и $\tilde{t}_n \to t$, то $F(\tilde{t}_n) \to F(t)$. Это очевидно! (Из $\tilde{t}_n$ можно выбрать t_{n_k}, сходящ. к t)

$(\Leftarrow)$ Пусть $F(t)$ непр. слева $\forall t$; д-м, что m_F сигма-аддитивна. $[a, b) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k)$.

а) Пусть $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k) \subset [a, b) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} m_F[a_k, b_k) \le m_F[a, b)$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}[F(b_k) - F(a_k)] \le F(b) - F(a)$. $\forall \varepsilon > 0$ $[a, b-\delta] \subset [a, b)$ $\forall \delta > 0$; $[a, b) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k - \delta_k, b_k)$ $\forall \delta_k > 0$. Как их выбрать? Вот так: $F(b) - F(b-\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$; (из непр-ти); $F(a_k) - F(a_k - \delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

По лемме Гейне-Бореля, сущ. конечное подпокрытие: $[a, b-\delta] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k - \delta_k, b_k) \Rightarrow [a, b-\delta) \subset [a, b-\delta] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k, b_k) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n}[a_k - \delta_k, b_k) \Rightarrow [a, b-\delta) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n}[a_k - \delta_k, b_k)$. Значит,

$m_F[a, b-\delta) \le \sum\limits_{k=1}^{n} m_F[a_k - \delta_k, a_k) \Rightarrow F(b-\delta) - F(a) \le \sum\limits_{k=1}^{n}[F(b_k) - F(a_k - \delta_k)]$; $F(b) - F(a) \le F(b) - F(b-\delta) + \sum\limits_{k=1}^{n}[F(b_k) - F(a_k)] + \sum\limits_{k=1}^{n}[F(a_k) - F(a_k - \delta_k)] \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum(F(b_k) - F(a_k)) + \varepsilon$. Итого,

$F(b)-F(a) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k)-F(a_k))+\varepsilon$. В силу произв ε и с учетом противоположного нер-ва, $F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{\infty}[F(b_k)-F(a_k)]$. Ч.Т.D.

Замечание. Для случая $P=\{(a,b]\}$ нужно требовать непр-ти справа.

Утв. Для $\forall$ $F(t)$ - неубыв. и непр. слева $\forall t$ $\forall$ борелев множество измеримо относительно μ_F.

D-во. $(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n}, b) \Rightarrow$ измеримо; $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$ - измеримо относительно μ_F; значит, и все борелевские измеримы $\forall$ $F(t)$. Ч.Т.D.

Пример. $F(t)=\begin{cases}1, t>0\\ 0, t\leqslant 0.\end{cases}$ Р-м $[0,\frac{1}{n})$; $\mu\{0\}=\lim \mu_F[0,\frac{1}{n})= =\lim_{n\to\infty}[F(\frac{1}{n})-F(0)]=1$.

Опр. Пусть μ, ν - меры, заданные на сигма-алгебре ~~изм.~~ множеств; Тогда мера ν наз-ся абс.-непр-ой относительно μ, если из $\underset{\text{мю}}{\mu(A)}=0 \Rightarrow \underset{\text{ню}}{\nu(A)}=0$. $\forall A$.

090909

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 08}}$

Теорема. Пусть μ, ν - сигма-адд. меры, заданные на сигма-алгебре Σ; тогда ν абс. непр. относит. $\mu \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, т.ч. $\mu(A)<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \nu(A)<\varepsilon \quad \forall A\in\Sigma$.

D-во. ($\Leftarrow$) Пусть $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$: $\mu(A)<\delta \Rightarrow \nu(A)<\varepsilon$. Берем произвольное $A\in\Sigma$: $\mu(A)=0<\delta\ \ \forall\delta>0 \Rightarrow \nu(A)<\varepsilon\ \forall\varepsilon>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \nu(A)=0$

($\Rightarrow$) $\mu(A)=0 \Rightarrow \nu(A)=0\ \forall A\in\Sigma$; док-во от противного: $\exists\varepsilon>0$, т.ч. $\forall\delta_n>0$ $(\delta_n=\frac{1}{2^n})$ $\exists A_n\in\Sigma$: $\mu(A_n)<\delta_n$, но $\nu(A_n)\geqslant\varepsilon$.

Положим $B_m=\underset{n=m}{\bigcup}A_n$ (обьединение) $(B_m\in\Sigma)$. $\mu(B_m)\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\mu(A_n)<\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}=$ $=\frac{1}{2^{m-1}}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$; $B_{m+1}\subseteq B_m$. Пусть $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$, $B\in\Sigma$.

В силу сигма-аддитивности, $\mu(B)=\lim_{m\to\infty}\mu(B_m)=0$.

Т.к. ν-сигма-аддитивна, то $\nu(B)=\lim\limits_{m\to\infty}\nu(B_m)$; т.к. $A_m\subset B_m$ следует, что $\nu(A_m)\leq\nu(B_m) \Rightarrow \varepsilon\leq\nu(A_m)\leq\nu(B_m)\Rightarrow\nu(B)\geq\varepsilon>0$.

$m(B)=0$, но $\nu(B)>0$. Ч.Т.D.

Опр. Ф-я $F(x)$ называется абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, что если $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, то $\sum\limits_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$, где $(a_k,b_k)\cap(a_j,b_j)=\varnothing$ при $i\neq j$

Замечание. Если F-абс. непр., то $F(x)$ непрерыв. $\forall x$.

(получается, если положить $n=1$)

Теорема. Пусть $m(A)$ порождена длиной; $\nu_F(A)$ - порождена ф-ей $F(t)$ - неубыв., непр. слева в $\forall t$. Тогда ν_F абс.-непрерывна отн. $\nu \Leftrightarrow F(t)$ - абс-непр. ф-я.

Док-во $\boxed{\Rightarrow}$ ν_F-абс. непр. отн m; $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, что как только $m(A)<\delta$, то $\nu_F(A)<\varepsilon$. В роли A возьмём интервальчики: $(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)$; $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\varnothing$ при $i\neq j$ и $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\varepsilon$

Тогда возьмём $A=[a_1,b_1)\cup[a_2,b_2)\cup\dots\cup[a_n,b_n)$

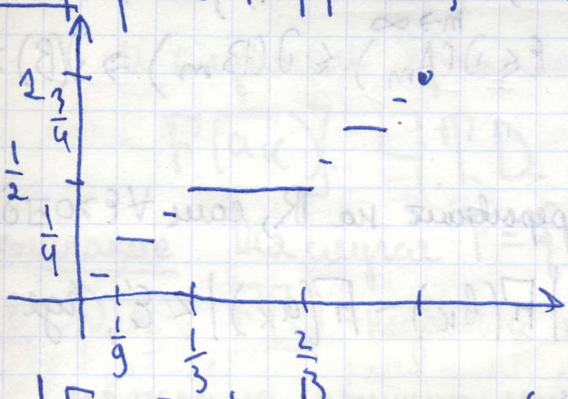
Понятно, что $m(A)<\delta$; $\nu_F(A)=\nu_F[a_1,b_1)+\dots+\nu_F[a_n,b_n)=$
$=F(b_1)-F(a_1)+\dots+F(b_n)-F(a_n)<\varepsilon$

$\boxed{\Leftarrow}$ $F(t)$-абс. непр. Пусть $m(A)=0$. Надо д-ть, что $\nu_F(A)=0$.

Т.к. $F(t)$ абс. непр., то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: как только $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, то $\sum\limits_{k=1}^{n}(F(b_k)-F(a_k))<\varepsilon$. Т.к. $m(A)=0$, то $m^*(A)=0=$
$=\inf\limits_{A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k}\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(B_k)=$ (считаем, что $B_kB_j=\varnothing$) $\inf\sum\limits_{k=1}^{\infty}m[a_k,b_k)$

(сущ. такие $[a_k,b_k)$, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m[a_k,b_k)<\delta$; $\Rightarrow$
$\sum\limits_{k=1}^{n}m[a_k,b_k)<\delta\ \forall n$; из абс. непр-ти $\sum\limits_{k=1}^{n}(F(b_k)-F(a_k))<\varepsilon$
$\forall n$. Устремим n к бесконечности: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[F(b_k)-F(a_k)]<\varepsilon_1\Rightarrow$
$\Rightarrow A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_F[a_k,b_k)<\varepsilon_1\Rightarrow\nu_F^*(A)=0$
$\Rightarrow\nu_F(A)=0$. Ч.Т.D.

Пример ф-ии непрерывной, но не абсол. непрерывной. (Лестница Кантора)



$$F_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{, иначе линейна} \\ F_1(0) = 0, & F_1(1) = 1 \end{cases}$$

Д-м, что предел существует.

$|F_n - F_{n+1}| \le \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$ $\forall n$ (в силу перепадов) Значит, $F_n(t) \rightrightarrows F(t)$ - непрерывная ф-я; $F(t)$ неубыв; $F(0)=0$, $F(1)=1$; постоянна почти всюду.

$F(t)$ порождает меру ν_F. $[0,1] = K \sqcup \left[\bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)\right]$ (выброшенные интерв); $\nu_F[0,1] = \nu_F[0,1) = \nu_F(K) + \sum_{k=1} \nu_F(a_k, b_k)$, но $F(b_k) = F(a_k)$,

и $1 = \nu_F(K)$. (O_O) Пусть $E \subset \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ - неизмеримое по Лебегу подмножество; но по $\nu_F(E) = 0$, оно вполне измеримо

Опр. Две меры μ и ν, сигма-аддитивные и заданные на сигма-алгебре Σ, наз-ся взаимно-сингулярными, если $\exists A \subset X$, что $\mu(A) = 0$, $\nu(X \setminus A) = 0$.

Пример $A = K$; $\mu(K) = 0$, $\nu_F [0,1] \setminus K = 0 \Rightarrow \mu$ и ν_F взаимно сингулярны.

§10 В этой главе отсутствует.

ГЛАВА 2. Измеримые функции.

§1 Определения и свойства измеримых ф-й.

(X, Σ, μ) — сигма-адд. мера, полная.

X — все пр-во, Σ — сигма-алгебра

Опр. $f(x)$ задана на $\mathbb{R}^n$; она называется измеримой, если $\forall a$ измеримо множество $\{x \in X : f(x) < a\} \in \Sigma$.

Замечание Если $f(x)$ непрерывна, то она измерима.

Док-во $\{f(x) < a\}$; д-но д-ть, что оно открыто. Пусть $x_0 \in \{f(x) < a\}$.

т.е. $f(x_0)<a$. В силу непр-ти следует, что $\exists$ шар с цент. в т. x_0 с достаточно малым радиусом, лежащий в $\{f(x)<a\}$. Ч.Т.Д.

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 09}}$

29.09

Теорема. Следующие 4 утверждения эквивалентные:

1) $\forall a$ измеримо $\{f(x)<a\}$
2) $\forall a$ измеримо $\{f(x)\leq a\}$
3) $\forall a$ измеримо $\{f(x)>a\}$
4) $\forall a$ измеримо $\{f(x)\geq a\}$

Док-во.
- $1\Rightarrow 2$. $\{f(x)\leq a\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{f(x)<a+\frac{1}{n}\}$ – измеримо, ибо сигма-алгебра.
- $2\Rightarrow 3$ $\{f(x)>a\}=X\setminus\{f(x)\leq a\}$
- $3\Rightarrow 4$ $\{f(x)\geq a\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{f(x)>a-\frac{1}{n}\}$
- $4\Rightarrow 1$. $\{f(x)<a\}=X\setminus\{f(x)\geq a\}$. Ч.Т.D.

Пример. Неизмеримая функция. Пусть E – неизмеримо; $\chi_E(x)=\begin{cases}1, x\in E\\ 0, x\notin E\end{cases}$

Эта ф-я неизмеримо: $\{\chi_E(x)>0\}=E\notin\Sigma$.

Опр. Две ~~измеримые~~ ф-ии f, g называются эквивалентными, если $\{f(x)\neq g(x)\}$ имеет меру нуль.

Нв. Если $f(x)$ измерима и $g(x)\sim f(x)$, то $g(x)$ измерима.

D-во. Пусть $E=\{f(x)\neq g(x)\}$, $m(E)=0$. $X=(X\setminus E)\sqcup E$.

$\{g(x)<a\}=\left[\{g(x)<a\}\cap(X\setminus E)\right]\sqcup\left[\{g(x)<a\}\cap E\right]=$

$=\left[\underbrace{\{f(x)<a\}\cap(X\setminus E)}_{\text{измеримо}}\right]\sqcup\left(\underbrace{\{g(x)<a\}\cap E}_{\text{мера нуль}}\right)\Rightarrow g$ измерима. Ч.Т.D.

Опр. $f(x)\overset{\text{п.в.}}{=}g(x)$ на X, если $m(f(x)\neq g(x))=0$

Теорема. Если $f_n(x)$ измеримы и $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $\forall x\in X$, то $f(x)$ – измер. ф-я.

D-во. $\{f(x)<a\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=m}^{\infty}\{f_k(x)<a-\frac{1}{n}\}$. D-м это.

1) $x \in \{f(x) < a\} \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$; $\exists N: \forall k \geq N$

$f_k(x) < a - \frac{1}{n}$. (т.е. лишь суш. n). Значит,

$\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \{f_k(x) < a - \frac{1}{n}\} \ni x \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=m}^{\infty} \{f_k(x) < a - \frac{1}{n}\}$

2) $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=m}^{\infty} \{f_k(x) < a - \frac{1}{n}\} \Rightarrow \exists\, n, m: \ x \in \bigcap\limits_{k=m}^{\infty} \{f_k(x) <$

$< a - \frac{1}{n}\} \Rightarrow x \in \{f_k(x) < a - \frac{1}{n}\} \ \forall k \geq m$; Устремим k к ∞: $\{\lim f_k(x) \leq a - \frac{1}{n}\} \ni x$. Ч.Т.D.

Можно ли любую разрывную функцию представить в виде предела непр. ф-й (поточечного)? Оказывается, нет. Если $f(x)$ – неизмерима, то она не может быть представлена в виде предела. (ибо их предел измерим)

§2 Измеримость суммы, разности, произведения и частного измер. ф-й.

Лемма. Если $f(x)$ измерима, то $f(x) + C$ – измерима (C – const)

D-во. $\{f(x) + C < a\} = \{f(x) < a - C\}$ – изм. Ч.Т.D.

Лемма. Если $f(x)$ измерима, то $Cf(x)$ – измерима. (C – const)

D-во. $\{Cf(x) < a\} = \begin{cases} f(x) < \frac{a}{C}, & C > 0 \text{ – изм.} \\ f(x) > \frac{a}{C}, & C < 0 \text{ – изм.} \end{cases}$ ($C = 0$: $\equiv 0$ изм) Ч.Т.D.

Лемма. Если $f(x), g(x)$ – измеримы, то $\{f(x) < g(x)\}$ измеримо

D-во. $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ – все рац. числа; $\{f(x) < g(x)\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{f(x) < r_k\}}_{\text{изм.}} \cap \underbrace{\{r_k < g(x)\}}_{\text{изм.}}$. Ч.Т.D.

Теорема. Сумма, разность изм. функций – измерима.

D-во. $\{f(x) + g(x) < a\} = \{f(x) < a - g(x)\}$ – изм. $\forall a$. Ч.Т.D.

Следствие Линком измеримых – измеримая.

Лемма. Если $f(x)$ – измер, то $|f(x)|$ – измер.

Д-во. $\{|f(x)|<a\} \overset{a>0}{\underset{\varnothing,\ a<0}{=}} \{f(x)<a\} \cap \{f(x)>-a\}$. Ч.Т.Д.

Пример $f(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ -1, & x\in X\setminus E,\end{cases}$ где E – неизмеримо. $|f|\equiv 1$ – измер.

Но сама f неизмерима.

Лемма. Если $f(x)$ – изм, то $f^2(x)$ – измерима

Д-во $\{f^2(x)<a\} = \begin{cases}\varnothing, & a<0 \quad \text{– измер}\\ \{|f(x)|<\sqrt{a}\} & \text{– изм.}\end{cases}$ Ч.Т.Д.

Теорема. Произведение двух измеримых ф-й – измеримо.

Д-во. $f\cdot g = \left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]\frac{1}{4}$. Ч.Т.Д.

Теорема. Частное двух измеримых – измеримо.

Д-во $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$; $(g\neq 0)$ $\left\{\frac{1}{g}<a\right\} = \begin{cases} a=0: \{g<0\},\\ a>0: \{g<0\}\cup\{\frac{1}{a}<g\}\\ a<0: \{\frac{1}{a}<g\}\cap\{g<0\}\end{cases}$

$\frac{1}{g}$ изм. $\Leftarrow$

Ч.Т.Д.

Замечание. Если $\mu\{g(x)=0\}=0$, то $\frac{1}{g}$ все равно измерима на $X\setminus\{g(x)=0\}$.

Теорема. $\exists\ f_k$, $k=1,2,3,\dots$ – измеримые ф-ии; пусть $|f_k(x)|\le M$ $\forall k$ (почти всюду). Тогда $\overline{f}(x)=\sup\limits_{k\ge1} f_k(x)$, $\underline{f}(x)=\inf\limits_{k\ge1} f_k(x)$ – измеримые функции.

Д-во. Д-м для sup (inf аналогично). $\{\overline{f}(x)\le a\} = \cancel{\bigcup_{k=n=1}^{\infty}\{f_k\le a-\frac{1}{n}\}}$ $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{f_k(x)\le a\}$; $x\in\{\overline{f}(x)\le a\}\Rightarrow f_k(x)\le a$; если $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{f_k\le a\}$, то $\{f_k(x)\le a\}$ $\forall k \Rightarrow \{\sup f_k\le a.\}$ Ч.Т.Д.

Пример. $f_k(x)=f(x)+k$ – и теорема не верна, вообще говоря.

§3 Сходимость по мере.

ЛЕКЦИЯ #10

Пример к §2. Пусть $f(x)$ - диф. в $\forall$ т. функция, $f(x)$ измерима; тогда $f'(x)$ тоже измерима, ибо $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)$ - предел послед. измеримых функций.

Опр. (Всюду в этом параграфе $\mu(X) < \infty$) Последоват. измеримых функций $f_n(x)$ называется сходящейся по мере к измер. $f(x)$, если $\mu(|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0 \ \forall \varepsilon > 0$.

· Можно рассматривать сх-ть по мере на измеримом $E \subset X$: $\forall \varepsilon > 0$ $\mu(E \cap \{f_n - f \geq \varepsilon\}) \longrightarrow 0$.

· Множество меры нуль на сходимость по мере не влияет.

· А единственна ли такая f? Да, с точностью до мн-ва меры нуль:

Теорема. Если f и $\tilde{f}$ - предел по мере п-ти $f_n(x)$, то $f \overset{п.в.}{=} \tilde{f}$

D-во. Фиксируем $\varepsilon > 0$; $\varepsilon \leq |f - \tilde{f}| \leq |f - f_n| + |f_n - \tilde{f}|$. Но тогда либо $|f - f_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, либо $|f_n - \tilde{f}| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ (а может, и одновременно) $\Rightarrow \{|f - \tilde{f}| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|f - f_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_n - \tilde{f}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$

Значит, $\mu(|f - \tilde{f}| \geq \varepsilon) \leq \mu(|f - f_n| \geq \varepsilon/2) + \mu(|f - f_n| \geq \varepsilon/2) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{сх. по мере}} 0 \Rightarrow \mu(|f - \tilde{f}| \geq \varepsilon) = 0$. $\forall \varepsilon > 0$. Отметим, что

$\{|f - \tilde{f}| > 0\} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{|f - \tilde{f}| \geq \frac{1}{n}\} \Rightarrow \mu\{|f - \tilde{f}| > 0\} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\{|f - \tilde{f}| \geq \frac{1}{n}\} = 0 \Rightarrow \mu\{|f - \tilde{f}| > 0\} = 0 \Rightarrow f \overset{п.в.}{=} \tilde{f}$ Ч.Т.D.

Теорема. Пусть $\underset{\text{изм.}}{f_n}(x) \xrightarrow{п.в.} f(x)$ на X; тогда $f_n(x) \xrightarrow{\text{мера}} f(x)$.

D-во. 1) Пусть $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X$; $\forall \varepsilon > 0$ введем $E_n = \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$; $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$; $R_{n+1} \subset R_n$; $R = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n$.

Если $\mu(R) = 0$, то в силу непр-ти меры $\mu(R_n) \to 0$; $E_n \subset R_n \Rightarrow \mu(E_n) \to 0$. $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{мера}} f$. Покажем, что всегда $\mu(R) = 0$, а точнее, что $R = \varnothing$. Пусть $x \in R \Rightarrow$

$x \in R_n \ \forall n$, но $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k \Rightarrow x \in E_{k_m}$, $m=1,2,\ldots$

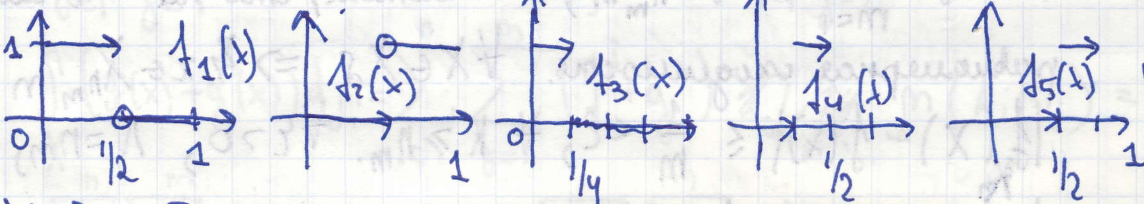
Но $E_n = \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \Rightarrow |f_{k_m}(x) - f(x)| \geq \varepsilon \ \forall k_1, k_2 \ldots$

Значит, $f_{k_m}(x) \not\to f(x)$ (?!) Значит, $\mu R = 0$.

2) Пусть $f_n(x) \xrightarrow{п.в.} f(x)$ на E; $\mu(E)=0$, $f_n(x) \not\to f(x)$. Возьмем $\tilde X = X \setminus E$; на $\tilde X$ $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in \tilde X$. См. пункт 1).

Значит, $f_n(x) \xrightarrow{мера} f(x)$ на X (ибо отличаются они на мн-ве нулевой мере). Ч.Т.D.

Пример.



и т.д.

$X=[0,1]$. $f_n \xrightarrow{мера} f$: $\{|f_n - 0| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{2^m} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Но

$f_n(x) \not\to f(x)\ \forall x \in [0,1]$, ибо $\overline{\lim}\, f_n(x) = 1$, $\underline{\lim}\, f_n(x) = 0$

Это очевидно в силу определения (построения)

Теорема. Пусть $f_n \xrightarrow{мера} f$ (f_n, f - измер.) на X. Тогда, существует подп-ть $f_{n_k}(x) \xrightarrow{п.в.} f(x)$.

Д-во $\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \to 0$; Выберем f_{n_k} так, что бы $\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}\}$ $\leq \frac{1}{2^k}$; Введем $E_k = \{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}\}$; $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$; $\mu(R_n) \leq$ $\leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; $R_{n+1} \subset R_n$; $R = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n$. В силу непр-ти меры, $\mu(R) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n) = 0$. Покажем, что $f_{n_k}(x) \to f(x)\ \forall x \in X \setminus R$. Пусть $x \in X\setminus R$. Тогда $\exists R_n$, т.ч. $x \notin R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k \Rightarrow x \notin E_k$, $k=n, n+1, \ldots$. Значит, $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\ \forall k \geq n$. Устремляя k_n к бесконечности, $|f_{n_k}(x) - f(x)| \to 0 \Rightarrow \forall x \in X\setminus R$ $f_{n_k}(x) \to f(x)$. Ч.Т.D.

Теорема (Егорова) Пусть $f_n(x) \xrightarrow{п.в.} f(x)$ на X; f_n, f - измеримы; $\mu(X) < +\infty$; Тогда $\forall \delta > 0\ \exists X_\delta \subset X$: $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X_δ.

Док-во. 1) $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in X$. Введем $X_{nm} = \{|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}\ \forall k \geq n\}$

Видно, что $X_{nm} \subset X_{n+1,m}$ $\forall n, m$; $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_{nm} = X$. (ибо $\forall x \in X$ $f_k(x) \to f(x)$; $\exists N: k \geq N$ $|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}$ $\Rightarrow x \in X_{nm}, n \geq N$)

$\lim\limits_{n \to \infty} \mu(X_{nm}) = \mu(X)$ $\forall m$. Выберем подп-ть $X_{n_m m}$ так, что $\mu(X \setminus X_{n_m m}) \leq \frac{\delta}{2^m}$ (δ - произвольное, >0). Тогда

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(X \setminus X_{n_m m}) \leq \delta$. Положим $X_\delta = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} X_{n_m m}$; тогда

$X \setminus X_\delta = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (X \setminus X_{n_m m})$. Покажем, что на X_δ имеет место равномерная сходимость. $\forall x \in X_\delta \Rightarrow \forall x \in X_{n_m m} \Rightarrow$

$|f_{k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$, $\forall k \geq n_m$. $\forall \varepsilon > 0$, $N = n_m$, и $\forall k \geq N$

$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X_\delta$.

2) Пусть $f_k \xrightarrow{п.в.} f$, т.е. $f_k \to f$ на $X \setminus E = \tilde{X}$, а на $\tilde{X}$ см. п. 1); $\exists X_\delta \subset \tilde{X}$, $\mu(\tilde{X} \setminus X_\delta) < \delta$. Ч.Т.Д.

10.09

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#11}}$

ГЛАВА 3. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА.

§1 Определение интеграла Лебега.

(X, Σ, μ) - живём тут.

Σ — сигма-алгебра; μ — полная, конечная сигма-адд.; считаем, что $\mu(X) < \infty$

Введём $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - хар. ф-я. По определению, интеграл Лебега $L\int\limits_X \chi_A(x)\, d\mu \equiv \mu(A)$.

Опр Простые функции - функции с конечным числом значений, т.е. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k \cdot \chi_{A_k}(x)$, $A_k \in \Sigma$, $A_k A_j \overset{(k \neq j)}{=} \varnothing$, $X = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} A_j$, $f_i \in \mathbb{R}$.

Опр. Интегралом Лебега от простой $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k\, \chi_{A_k}(x)$ называется число $L\int f(x)\, d\mu = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k\, \mu(A_k)$

"L" далее не пишем

Свойства:

1) Если f - простая, то $c \cdot f$ - простая, и $L\int\limits_X c f\, d\mu = c \cdot \int\limits_X f\, d\mu$.

2) Если f и g — простые, то $f \pm g$ — тоже простая, и $\int\limits_X (f(x) \pm g(x))\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu + \int\limits_X g(x)\,d\mu$

Док-во. Пусть $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f^i \chi_{A_i}(x)$, $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} g^i \chi_{B_i}(x)$, причём $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$. Тогда $f(x) + g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} (f^{i} + g^j)\chi_{A_iB_j}(x)$, $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n}\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} A_iB_j$. Значит,

$$\int\limits_X (f(x)+g(x))\,d\mu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (f^i + g^j)\,\cancel{\chi_{A_iB_j}(x)}\,\mu(A_iB_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f^i \mu(A_iB_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g^j \mu(A_iB_j) =$$

$$= \left\{ \text{Ибо } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f^i \mu(A_iB_j) = \sum_{i=1}^{n} f^i \left(\sum_{j=1}^{m} \mu(A_iA_j)\right) \right\} =$$

$$= \int\limits_X f(x)\,d\mu + \int\limits_X g(x)\,d\mu. \text{ Ч.Т.Д.}$$

• Отметим, что $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ — тоже простые.

Следствие. f, g — простые $\Rightarrow \int\limits_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int\limits_X f\,d\mu + \beta \int\limits_X g\,d\mu$

3) Если f — простая, то $\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| \leq \max|f(x)|\,\mu(X)$

Док-во. $\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} f^i \mu(A_i)\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |f^i|\,\mu(A_i) \leq \max\limits_{i=\overline{1,n}} |f^i| \cdot$

$\cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \max|f(x)|\,\mu(X)$. Ч.Т.Д.

Лемма. Если $f_n(x)$ — послед-ть простых ф-ий, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, то $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu$ тоже сходится к некоему числу.

Док-во. $\left|\int\limits_X f_n(x)\,d\mu - \int\limits_X f_m(x)\,d\mu\right| = \left|\int\limits_X (f_n(x) - f_m(x))\,d\mu\right| \leq$

$\leq \max|f_n(x) - f_m(x)| \cdot \mu(X) \leq \varepsilon\,\mu(X)$ $\forall n, m \geq N$.

Послед. чисел фундам. $\Rightarrow$ сх-ся. Ч.Т.Д.

Опр. Пусть $f(x)$ – равномерный предел на X простых ф-ий $f_n(x)$. Тогда $\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu$ – интеграл Лебега по определению.

Замечание. Если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $\tilde f_n \rightrightarrows f(x)$ ($f_n, \tilde f_n$ – простые) то $\lim \int\limits_X f_n(x)\,d\mu = \lim \int\limits_X \tilde f_n(x)\,d\mu$.

Док-во. $\forall \varepsilon > 0$ $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$, $\forall n \geq N$, и $|f(x) - \tilde f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$, $\forall m \geq N$, значит – $|f_n(x) - \tilde f_m(x)| < 2\varepsilon$. Но $\left|\int\limits_X (f_n(x) - \tilde f_m(x))\,d\mu\right| \leq$ $\leq \max(f_n(x) - \tilde f_m(x))\,\mu(X) < 2\varepsilon\,\mu(X) \Rightarrow \lim \int\limits_X f_n(x)\,d\mu =$ $= \lim \int\limits_X \tilde f_n(x)\,d\mu$. Ч.Т.Д.

А на какой класс мы расширим определение? Предел ~~простых про~~ измеримых – измеримая, т.е. $f(x)$ измерима; кроме того, $f(x)$ ограничена: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$, $\forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon$
$|f(x)| \leq |f_N(x)| + \varepsilon$, $|f(x)| \leq \max |f_N(x)| + \varepsilon$.

Лемма. Пусть $f(x)$ измерима и ограничена; тогда сущ. простые $f_n(x)$, т.ч. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X

Док-во. $f(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2} - \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2} = f_+(x) - f_-(x)$.

Отметим, что $f_+, f_- \geq 0$ и измеримы. Будем аппроксимировать f, считая, что она неотрицательна, измерима и ограничена: $0 \leq f(x) \leq M$. Положим $\{\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}\} = A_{kn}$, $k = 0, 1, \ldots$; $n \in \mathbb{N}$. A_{kn} – измеримы, попарно непересекаются; ($A_{kn} A_{jn} \overset{k \neq j}{=} \varnothing$) Введем $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \chi_{A_{kn}}(x)$ (на самом деле тут N); тогда $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ $\forall x \in A_{kn} \Rightarrow \forall x \in X$. Ч.Т.Д.

Замечание. Если $f(x)$ не огр., то $\exists$ послед. пр. ф-ий, принимающих счётное число значений: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Теорема. Любая измеримая и огр. ф-я интегрируема по Лебегу.

Док-во Лемма + замечание = Ч.Т.Д.

- $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{K}{N} \chi_{A_{kn}}(x)$; тогда $\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{K}{N} \mu(A_{kn})$. Тогда

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim \int\limits_X f_n(x)\,d\mu = \lim \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{K}{n} \mu(A_{kn})$$ – интегральная сумма Лебега.

§2 Интеграл Лебега от неограниченной ф-ии.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f^{(i)} \chi_{A_i}(x)$; $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ $\left(A_i A_j \overset{i \neq j}{\equiv} \varnothing\right)$

Опр. Простая ф-я $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f^{(i)} \chi_{A_i}(x)$ – интегрируемая по Лебегу, если сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f^{(i)}| \mu(A_i)$, и интегралом Лебега наз-ся число $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f^{(i)}| \mu(A_i) \equiv \int\limits_X f(x)\,d\mu$. $\leftarrow |f^{(i)}|$?

- Таким образом, абс. интегрируемость равносильна интегрируемости.

Свойства:

1. Если простая f интегрируема, то $c \cdot f$ интегрируема, и $\int\limits_X c f(x)\,d\mu = c \int\limits_X f(x)\,d\mu$

2. Если f, g – простые, интегрир., то $f+g$ – тоже интегрируемые, и $\int\limits_X (f+g)\,d\mu = \int\limits_X f\,d\mu + \int\limits_X g\,d\mu$.

Д-во Сходятся ряды: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f^{(i)}| \mu(A_i)$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |g^{(i)}| \mu(B_j)$

Тогда $f+g = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} (f^{(i)} + g^{(i)}) \mu(A_i B_j)$; Изучим

сходимость $\sum \sum |f^{(i)} + g^{(i)}| \mu(A_i B_j) \le \sum \sum |f^{(i)}| \mu(A_i B_j) +$

$+\sum\sum |g^{(i)}| \mu(A_i B_j) = \sum |f^{(i)}| \mu(A_i) + \sum |g^{(j)}| \mu(B_j)$

И, таким образом, $\int (f+g)\, d\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} (f^{(i)}+g^{(j)}) \mu(A_i B_j) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{\infty} f^{(i)} \mu(A_i) + \sum\limits_{j=1}^{\infty} g^{(j)} \mu(B_j) = \int\limits_X f(x)\, d\mu + \int\limits_X g(x)\, d\mu$

Ч.Т.Д.

31.10.09

ЛЕКЦИЯ #12

<u>Пример.</u> $f(x) = \begin{cases} 1, x\in\mathbb{Q} \\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$ μ-длина; $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) + 0\cdot \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x)$

$\int\limits_0^1 f(x)\, d\mu = 1\cdot\mu(\mathbb{Q}) + 0\cdot \mu([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = 0$

Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f^k \chi_{A_k}(x)$, где $X = \sqcup A_k$; $f(x)$, по определению, интегр. по Лебегу, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f^k| \mu(A_k) < \infty$. Тогда

$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f^k \mu(A_k)$

<u>Лемма.</u> Пусть $f(x)$-простая и интегр.; тогда $\left|\int\limits_X f(x)\, d\mu\right| \le$

$\le \sup\limits_X f(x) \mu(X)$

<u>Д-во</u> ~~Пусть f_n - послед. пр. интегр. ф-й: $f_n \rightrightarrows f$~~ Очевидно. ЧТД

<u>Лемма.</u> Пусть $f_n(x)$-послед инт. пр. ф-й: $f_n \rightrightarrows f$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$, и он не зависит от выбора f_n.

<u>Д-во</u> 1) Оценим $\left|\int\limits_X f_n(x)\, d\mu - \int\limits_X f_m(x)\, d\mu\right| \le \sup\limits_X |f_n(x) - f_m(x)| \cdot$

$\cdot \mu(X) < \varepsilon$ при $n, m \geqslant N \Rightarrow$ предел сущ-т.

2) $\tilde{f}_n \rightrightarrows f$; $\left|\int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X \tilde{f}_n d\mu\right| \le \sup|f_n - \tilde{f}_n| \mu(X) \le$
пр. инт.

$\le \left(\sup|f_n - f| + \sup|\tilde{f}_n - f|\right)\mu(X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Опр.</u> Ф-я $f(x)$ наз-ся интегр. по Лебегу, если сущ-т пос-ть пр. интегр. ф-й f_n, т.ч. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Интегралом Лебе-

га называется $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu.$

Свойства простых ф-й

Ут-в. Пусть f, g – пр.; $g(x)$ неотриц. и интегр., $|f(x)| \le g(x)$. Тогда $f(x)$ интегр.

Д-во $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f^k \chi(A_k)$; $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g^k \chi(B_k)$, причем $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |g^j| \mu B_j < \infty$

$$f(x) = \sum_{k,j=1}^{\infty} f^k \chi(A_k B_j);\quad g(x) = \sum_{k,j=1}^{\infty} g^j \chi(A_k B_j)$$

Т.к. $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |g^j| \mu(A_k B_j) < \infty$ и $|f^j| < |g^j|$, то

$\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |f^k| \mu(A_k B_j) < \infty$. Ч.Т.Д.

§3 Свойства интегрируемых ф-й

① $f(x)$ инт $\Rightarrow c\cdot f(x)$ инт, и $\int\limits_X c f(x) d\mu = c \int\limits_X f(x) d\mu$

② f, g инт. $\Rightarrow f+g$ инт, и $\int\limits_X (f+g) d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu$.

③ Если $f(x) \overset{(п.в)}{\le} g(x)\ \forall x \in X$; f, g – интегр. $\Rightarrow \int\limits_X f d\mu \le \int\limits_X g d\mu$

Д-во Д-м для $f(x) \ge 0$. $f_n(x) = \chi\{\frac{k}{n} \le f_n(x) < \frac{k+1}{n}\} \cdot \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, 2 \dots$

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$; f_n – инт. $\Rightarrow \exists\, g_n \rightrightarrows f(x)$, $|f - f_n| < \varepsilon$,

$|g_n - f| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x)| = |f_n(x) - f + f - g_n + g_n| \le |f_n - f| +$

$+ |f - g_n| + |g_n| \Rightarrow |f_n(x)| \le |g_n(x)| + 2\varepsilon \Rightarrow f_n$ просто интегрир.

$\int f d\mu = \lim \underbrace{\int f_n d\mu}_{\ge 0} \ge 0 \Rightarrow \int\limits_X f d\mu \ge 0 \Rightarrow \int f d\mu \le \int g d\mu.$

Ч.Т.Д.

④ $f(x) \ge 0$ и интегр; $|g(x)| \le f(x)\ \forall x$; $g(x)$ – изм. Тогда $g(x)$ интегрируема.

Д-во f_n - простая, инт; $f_n \rightrightarrows f$; $\exists$ пр: $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$. $g = g^+ + g^-$

Положим $g_n = \begin{cases} \frac{k}{n}, & x \in \{\frac{k}{n} \le g(x) < \frac{k+1}{n}\}, \ k=0,1,\dots \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N:$

$|f - f_n| < \varepsilon \ \forall x \in X, \ |g_n - g| < \varepsilon \ \forall x \in X, \ \forall n \ge N.$

$|g_n| = |g_n - g + g| \le |g_n - g| + |g| \le \varepsilon + |f(x)| = \varepsilon + |f - f_n + f_n| \le$

$\le \varepsilon + |f - f_n| + |f_n| \le 2\varepsilon + |f_n(x)| \Rightarrow |g_n(x)| \le 2\varepsilon + |f_n(x)|$

$\left.\begin{array}{l} f_n(x) \text{ - пр. интегр.} \\ g_n \text{ - простая} \end{array}\right\} \Rightarrow g_n(x)$ интегр. Ч.Т.Д.

$g_n \rightrightarrows g(x) \Rightarrow g(x)$ инт.

Пример. $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \text{ - неизм} \\ -1, & \text{иначе} \end{cases}$ $g(x)$ неизм, $g^2(x)$ измерима

⑤ Если f интегр, то $|f(x)|$ интегрируема, и $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu$

Замечание. Если f измерима, $|f|$ - интегр. $\Rightarrow f$ интегрируема

Лемма. f - интегр, g - огр. и измерима, то $f \cdot g$ тоже интегрир.

Д-во $|g(x)| \le M$; $f \cdot g$ - измер.; $|f \cdot g| \le M|f|$ - инт $\Rightarrow f \cdot g$ инт. Ч.Т.Д

Пример. $g = \chi_A(x)$, A - изм; g - изм. и огр. $\Rightarrow f \cdot g$ измеримо.

Опр Пусть f инт. на X; тогда $\int_A f(x)\,d\mu = \int_X f(x)\chi_A(x)\,d\mu$.

⑥ (Аддитивность). Если f - инт. по X, A, B - измер., $AB = \varnothing$

то $\int_{A \cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$.

Д-во $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) \Rightarrow \int_{A \cup B} = \int_A + \int_B$ Ч.Т.Д.

Следствие. $\rceil A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, $A_i A_j \overset{i \ne j}{=} \varnothing$, $f(x)$ инт. на $X \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_A f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f\,d\mu$

Отметим, что если f неотриц, то $\int_A f\,d\mu = \nu(A)$ - мера :)

⑦ Если $m(A)=0$, то $\int_A f(x)\,dm = 0$ $\forall f$ (измер. функ.)

Д-во 1) f — простая. Очевидно.

2) f — произв. измерим; $f_n \rightrightarrows f$; $\chi_A(x) f_n \rightrightarrows \chi_A(x) f \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_X \chi_A(x) f(x)\,dm \Rightarrow 0 \Rightarrow \int_A f(x)\,dm = 0$ Ч.Т.Д

ЛЕКЦИЯ #13

13.10.09

⑧ Если $f \overset{п.в}{=} 0$ на X, то $\int_X f(x)\,dm = 0$.

Д-во $E = \{x : f(x) \neq 0\}$, $mE = 0$. Пусть $X = X \setminus E \sqcup E$. Ясно, что

$\int_{X\setminus E} f(x)\,dm = 0$; $\int_E f(x)\,dm = 0$ вообще $\forall f$ (св. 7). Ч.Т.D.

⑨ Пусть f интегр., и $\int_X |f(x)|\,dm = 0$. Тогда $f \overset{п.в}{=} 0$.

Док-во 1) Д-м неравенство Чебышёва: если $f \geq 0$, то $\forall a > 0$

$m\{f \geq a\} \leq \frac{1}{a}\int_X f(x)\,dm$. Пусть $\int_X f\,dm = \int_{\{f \geq a\}} f\,dm + \int_{\{f<a\}} f\,dm \geq$

$\geq \int_{\{f\geq a\}} f\,dm \geq$ {Проинтегрируем: } $\geq a \int_{\{f \geq a\}} dm = a\, m\{f \geq a\}$

$\Rightarrow m\{f \geq a\} \leq \frac{1}{a}\int_X f(x)\,dm$, ч.т.д.

2) Р-м $m\{|f| \geq \frac{1}{n}\} \leq n \int_X |f|\,dm = 0 \Rightarrow m(|f| \geq \frac{1}{n}) = 0\ \forall n$;

$\{|f| > 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| \geq \frac{1}{n}\} \Rightarrow m\{|f| > 0\} = 0$, ибо

счетное объединение мер нуль имеет меру нуль. Значит,

$m\{|f| > 0\} = 0 \Rightarrow f \overset{п.в.}{=} 0$ Ч.Т.D.

§4 Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

Теорема (абс. непр.) Пусть f инт. на X; тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$: как только $m(A) < \delta$, $A \in \Sigma$, то $|\int_A f\,dm| < \varepsilon$.

Замечание. Если $f \geq 0$, то речь идет о абс. непр. мер.

Док-во. 1) $f = \sum_{k=1}^{\infty} f^k \chi_{A_k}(x)$; $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \Sigma$. f-интегр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f^k| \mu(A_k)$ сходится. Фиксируем $\varepsilon > 0$; $\exists N$:

при $n \geq N$ $\sum_{k=N}^{\infty} |f^k| \mu(A_k) < \varepsilon/2$. Тогда $\forall A \in \Sigma$

$$\left|\int_A f(x)\, d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f^k \mu(AA_k)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{N-1} f^k \mu(AA_k)\right| + \sum_{k=N}^{+\infty} |f^k| \mu(AA_k) \leq \sum_{k=1}^{N-1} |f^k| \mu(AA_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\max_{k=1,\dots,N-1} |f^k| \sum_{k=1}^{N-1} \mu(AA_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \max_{k=1,\dots,N-1} |f^k| \mu(A) + \varepsilon/2$$

Возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{2\max\limits_{k=1,\dots,N-1} |f^k|}$; если $\mu(A) < \delta$, то всё док-но.

2) f-интегрируема; тогда $\exists$ простая интегр. $g(x)$, т. ч.

$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$ $\forall x \in X$ (из равномерной сходимости)

$$\left|\int_A f\, d\mu\right| \leq \int_A |f - g|\, d\mu + \left|\int_A g\, d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(X)} \cdot \mu(X) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ибо для пр. сущ. δ). Ч.Т.D.

Теорема (сигма-адд.) Если f интегр. по X, $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \Sigma$, то

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f\, d\mu.$$

Док-во. $X = \bigsqcup_{k=1}^{N} A_k \bigsqcup_{k=N+1}^{\infty} A_k$; $\int_X f\, d\mu = \sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} f\, d\mu + \int_{\bigsqcup_{N+1}^{\infty} A_k} f\, d\mu$;

$\mu\left(\bigsqcup_{k=N+1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \mu(A_k) < \delta$, если $n \geq N$ (ибо ряд сх-ся)

(где δ из пред. теоремы) Из абс. непр-ти, $\left|\int_{\bigsqcup_{N+1}^{\infty} A_k} f\, d\mu\right| \leq$

$< \varepsilon$, при $n \geq N$.

Но тогда $\left|\int_X f\, d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f\, d\mu\right| < \varepsilon$, Ч.Т.D.

Замечание. Если $f \geq 0$ и $\nu(A) = \int\limits_A f\, d\mu$, то ν - сигма-адд. мера.

Теорема. Пусть $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$; f инт. по A_i $\forall i = 1, 2 \ldots$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} |f|\, d\mu < \infty$.

Тогда f интегр. по X.

Д-во. 1) $f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f^j \chi(B_j)$; $X = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, $B_j \in \Sigma$. $\int\limits_{A_i} f\, d\mu =$

$= \int\limits_X f(x) \chi(A_i)\, d\mu = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f^j \mu(A_i B_j)$. Тогда $\int\limits_{A_i} f\, d\mu =$

$= \sum\limits_{j=1}^{\infty} f^j \mu(A_i B_j)$ (Так-то!) Раз f инт. по A, то

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} |f^j| \mu(A_i B_j)$ сходится; $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f\, d\mu < \infty$, т.е.

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |f^j| \mu(A_i B_j) < \infty$, т.е. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f^j \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i B_j)}_{\mu(B_j)} < \infty$,

и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f^j \mu(B_j) < \infty \Rightarrow f$ интегр. на X.

2) Пусть f инт. на A_i, и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} |f(x)|\, d\mu < \infty$. Для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ простая $g(x)$, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$.

(о интегр. $g(x)$ ничего не предполагаем); $|g(x)| \leq |f(x)| + \varepsilon$ при $x \in X$. $\Rightarrow$ $g(x)$ инт. по A_i, и $\int\limits_{A_i} |g(x)|\, d\mu \leq$

$\leq \int\limits_{A_i} |f(x)|\, d\mu + \varepsilon \int\limits_{A_i} d\mu$. Просуммируем по i:

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} |g(x)|\, d\mu \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} |f(x)|\, d\mu + \varepsilon \mu(X) < \infty$.

Значит, для простой $g(x)$ ряд в лев. части сходится $\Rightarrow$ $g(x)$ интегр. по X. Но $|f(x)| \leq |g(x)| + \varepsilon$ $\forall x \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ интегр. на X. Ч.Т.Д.

§5 Три теоремы о предельном переходе под знаком (L)$\int$. (a.k.a. теоремы Лебега, Леви и Фату)

Теорема. Если f_n интегр. по X, и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, то $f(x)$ интегрируема, и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu$.

Док-во. f_n – измер $\Rightarrow f(x)$ измерима. $\forall \varepsilon>0\ \exists N: |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon,\ n \geq N\ \forall x\in X \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon + |f_n(x)|,\ n\geq N \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ интегрируемо.

$$\left|\int\limits_X f_n\,d\mu - \int\limits_X f\,d\mu\right| \leq \int\limits_X |f_n(x)-f(x)|\,d\mu \leq \varepsilon\cdot\mu(X) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu. \text{ Ч.Т.Д.}$$

Пример. $X=[0,1]$; $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ n, & 0<x\leq \frac{1}{n} \\ 0, & x>\frac{1}{n}. \end{cases}$ $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ на $[0,1]$ (поточечно)

$\int\limits_X f_n(x)\,dx = 1 \underset{n\to\infty}{\not\rightarrow} 0$

Теорема (Лебега) Если $f_n(x)$ интегр, $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$, и существует $F(x)$, т.ч. $|f_n(x)| \leq F(x)\ \forall n, \forall x\in X$. Тогда $f(x)$ интегрируема, и $\lim \int\limits_X f_n\,d\mu = \int\limits_X f\,d\mu$.

Д-во. Из сх-ти по мере, $\exists f_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} f. \Rightarrow f$ измеримо; $f_{n_k}(x) \leq F(x), \Rightarrow f(x) \leq F(x)\ \forall x$ (почти, может быть) $\Rightarrow f(x)$ инт.

$\forall \varepsilon>0$ $\left|\int\limits_X f_n\,d\mu - \int\limits_X f\,d\mu\right| \leq \int\limits_X |f_n - f|\,d\mu = \int\limits_{\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}} |f_n-f|\,d\mu + \int\limits_{\{|f_n-f|<\varepsilon\}} |f_n-f|\,d\mu \leq \int\limits_{\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}} 2F(x)\,d\mu + \varepsilon\,\mu(X)$. А т.к. $\mu\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}$ стр. к 0, и в силу абс. непр-ти, $\int\limits_{\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}} 2F(x)\,d\mu < \varepsilon$, $n\geq N$.

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n\,d\mu = \int\limits_X f\,d\mu$. Ч.Т.Д.

ЛЕКЦИЯ #14

15.10.09

Следствие. Если $f_n(x)$ инт., $f_n(x) \xrightarrow{п.в} f(x)$ на X, сущ. инт. $F(x)$, т.ч. $|f_n(x)| \le F(x)$ $\Rightarrow f(x)$ инт. и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu$.

Д-во $f_n \xrightarrow{п.в} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$. Ч.Т.Д.

Теорема (Леви) $f_n(x)$ – послед. инт. ф-ий; $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ $\forall n = 1, 2, \ldots$, п.в. $x \in X$; $\exists C = const$: $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu \le C$ $\forall n \ge 1$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (конечный или бесконечный). Тогда:

1) $f(x)$ интегр.;

2) $\int\limits_X f(x)\,d\mu \le C$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu$

Д-во 1) Не огр. общ-ти, считаем, что $f_n(x) \ge 0$ (иначе, $\tilde{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x) \ge 0$ п.в., $\tilde{f}_n \le \tilde{f}_{n+1}(x)$ $\forall n \ge 1$, $\int\limits_X \tilde{f}_n\,d\mu < -\int\limits_X f_1\,d\mu + C \equiv \tilde{C}$.)

2) $\mu\{f(x) = +\infty\} = 0$ – д-м это. Пусть $A = \{f(x) = +\infty\}$

Введём множества при $M > 0$: $A_n^M = \{x : f_n(x) \ge M\}$;

$\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^M}_{A_M} = \lim\limits_{n\to\infty} A_n^M$ (Ибо ясно, что $A_n^M \subseteq A_{n+1}^M$)

$\mu(A^M) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n^M)$; $\mu(A_n^M) \le \frac{1}{M} \int\limits_X f_n\,d\mu$ ⊛ (нер-во Чебышёва) ⊛ $\le \frac{C}{M}$ $\Rightarrow \mu(A^M) \le \frac{C}{M}$. $A \subset A^M$; $x \in A \Rightarrow \lim f_n(x) = +\infty$ $\Rightarrow f_n(x) \ge M$ с нек. $N \Rightarrow x \in A_n^M$ при $n \ge N(x) \Rightarrow$ $\mu(A) \le \mu(A^M) \le \frac{C}{M}$ $\forall M > 0$. Устремим $M \to \infty$: $\mu(A) = 0$.

3) Д-но д-ть, что $f(x)$ интегр. $\Rightarrow f_n(x) \le f(x) \Rightarrow$ всё хорошо.

Введём простую ф-ю $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot \chi\underbrace{\{k \le f(x) \le k+1\}}_{A_k}$

$X = \bigsqcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k \sqcup A$, но A не существенно из 2).

Ясно, что $\varphi(x) \leq f(x)$; но $f(x) \leq \varphi(x)+1$. (кроме A, но на кот. $f=\infty$)

Д-м, что φ синтегр, т.е. что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\mu(A_k)<\infty$

Введем $\varphi_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m} k\chi(A_k)$. При этом $0<\varphi_m(x)\leq m+1$

Р-м $\int\limits_X \varphi_m(x)d\mu=\sum\limits_{k=0}^{m} k\mu(A_k)\leq\sum\limits_{k=0}^{m}\int\limits_{A_k} f(x)d\mu \ominus$, ибо $k\leq f(x)\leq k+1$ на A_k.

$\ominus \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\bigsqcup\limits_{k=0}^{m} A_k} f_n(x)d\mu \leq C \Rightarrow \varphi_m\ \forall m \Rightarrow \int\limits_X \varphi(x)d\mu<C \Rightarrow$

$\varphi(x)$ инт $\Rightarrow f(x)$ интегрируема. Ч.Т.Д.

<u>Следствие.</u> $\varphi_k(x)$ - неотриц, инт. по X; $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_X \varphi_k(x)d\mu<\infty$. Тогда

$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ - интегрируема, и $\int\limits_X f(x)d\mu=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_X \varphi_k d\mu$

<u>Д-во</u> $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k(x)$; $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)\ \forall n$; $\int\limits_X f_n(x)d\mu=$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_X \varphi_k(x)d\mu\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_X \varphi_k(x)d\mu<\infty \Rightarrow f(x)=\lim f_n(x)$

интегр. и Ч.Т.Д.

<u>Теорема (Фату)</u> Пусть $f_n(x)\geq 0$, интегр. и $f_n \xrightarrow{п.в.} f(x)$ и $\int\limits_X f_n(x)d\mu\leq C$ $\forall n$. Тогда $f(x)$ интегр., и $\int\limits_X f(x)d\mu\leq C$

<u>Док-во.</u> $\varphi_n(x)=\inf\limits_{k\geq n}\{f_k(x)\}$; $0\leq\varphi_n(x)\leq\varphi_{n+1}(x)\ \forall x\in X$;

$\varphi_n(x)\leq f_n(x)$; φ_n - измерима; $\Rightarrow \varphi_n$ интегрируема,

и $\int\limits_X \varphi_n(x)d\mu\leq\int\limits_X f_n(x)d\mu\leq C\ \forall n \overset{\text{т. Леви}}{\Rightarrow} \lim\varphi_n(x)=\varphi(x)$ -

интегр, и $\int\limits_X \varphi(x)d\mu\leq C$. $\varphi_n(x)=\inf\limits_{k\geq n}\{f_k(x)\}$, а $f_k\to f$,

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$. Ч.Т.Д.

<u>Пример.</u> $f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ n, & 0<x\leq 1/n\\ 0, & \frac{1}{n}<x<1\end{cases}$ $\int\limits_0^1 f_n(x)d\mu=1$; $f_n\geq 0$;

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Пр. переход не работает, но т. Фату работает.

§ 6 Случай $\mu(X) = +\infty$

Опр. μ — σ-конечная, если $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, $\mu(X_k) < +\infty$

Опр. $f(x)$-изм. называется интегрируемой на X, если $f(x)$ интегр. на X_k, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} |f(x)|\, d\mu < \infty$, и $\int\limits_X f(x)\, d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} f(x)\, d\mu$.

Свойства аналогичны, кроме т. Лебега.

Теорема. Пусть $f(x) \geq 0$ и измерима; ~~пусть sup~~ $f(x)$ интегр. на $X \Leftrightarrow \sup\limits_{0 \leq \varphi(x) \leq f(x)} \int \varphi(x)\, d\mu < \infty$, где $\varphi(x)$ — простая ф-я с конечным числом значений, и, более того, $\int\limits_X f(x)\, d\mu = \sup\limits_{0 \leq \varphi(x) \leq f(x)} \int\limits_X \varphi(x)\, d\mu$.

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ № 15}}$

2010 09

Д-во. Пусть $A_{kn} = \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}$, $k = 0, 1 \ldots$; $n = 1, 2 \ldots$; $A_{kn} \cap A_{in} \overset{k \neq i}{=} \varnothing$;

$\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_{kn} = X \setminus \underbrace{\{f(x) = +\infty\}}_{\text{мн. меры нуль}} = X$ почти всё

$\{f(x) \geq M\} \supset B$: на B $f(x) = +\infty$, $\mu(B) > 0 \Rightarrow$ не интегрируема.

Пусть $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^n} \chi(A_{kn}) \div 0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$; $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$

$f(x) < \varphi_n(x) + \frac{1}{2^n} \Rightarrow \varphi_n(x) \xrightarrow{n \uparrow} f(x)$. Положим $\tilde{\varphi}_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x), & \varphi_n(x) \leq n \\ 0, & \varphi_n > n \end{cases}$

($\tilde{\varphi}_n$ принимает конечное число значений; неотрицательна и $\tilde{\varphi}_n(x) \leq f(x)$.) $\tilde{\varphi}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$, $\tilde{\varphi}_n(x) \leq \tilde{\varphi}_{n+1}(x)$

$\Rightarrow$ f-интегр. $\Rightarrow \varphi(x)$ интегр. ($\varphi(x) \leq f(x)$ по условию Теоремы), и $\int\limits_X \varphi(x)\, d\mu \leq \int\limits_X f(x)\, d\mu \Rightarrow \sup\limits_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi(x)\, d\mu \leq \int f(x)\, d\mu$; по т. Леви $\int\limits_X \tilde{\varphi}_n(x)\, d\mu \to \int\limits_X f(x)\, d\mu \Rightarrow \sup$ достигается, $\int\limits_X f(x)\, d\mu = \sup\limits_{0 \leq \varphi \leq f} \int\limits_X \varphi(x)\, d\mu$.

$\Leftarrow$ По т. Леви, т.к. $\int\limits_X \tilde{\varphi}_n(x)\, d\mu \leq \sup\limits_{0 \leq \varphi \leq f} \int\limits_X \varphi(x)\, d\mu$ и $\tilde{\varphi}_n \to f$, φ_n неуб, то f интегрируема; $\int\limits_X \varphi_n(x)\, d\mu \to \int\limits_X f(x)\, d\mu \Rightarrow \sup\limits_{0 \leq \varphi \leq f} \int\limits_X \varphi\, d\mu =$

$= \int\limits_X f(x)\,d\mu$ Ч.Т.Д.

Заметим, что неотрицательность роли не играет, ибо $\forall f = f^+ - f^-$.

$f_+ = \frac{|f|+f}{2}$, $f_- = \frac{|f|-f}{2}$, $f_\pm \geqslant 0$.

§7 Сравнение с интегралом Римана.

Теорема. Пусть $f(x)$ – огр. ф-я на $[a,b]$, и интегр. по Риману. Тогда $f(x)$ интегр. по Лебегу, и $(L)\int\limits_{[a,b]} f(x)\,d\mu = R\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

D-во. $x_k = a + \frac{(b-a)}{2^n} k$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$; $x_0 = a$, $x_{2^n} = b$. Положим

$M_k = \sup\limits_{[x_k, x_{k+1})} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{[x_k, x_{k+1})} f(x)$. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} M_k \frac{(b-a)}{2^n}$,

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} m_k \frac{(b-a)}{2^n}$. Т.к. f интегрируема по Риману, то

$S_n - s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = R\int\limits_a^b f(x)\,d\mu$.

Пусть $\overline{f}_n = M_k$ на $[x_k, x_{k+1})$, $\underline{f}_n = m_k$ на $[x_k, x_{k+1})$.

$L\int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n\,dx = S_n$; $L\int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n\,dx = s_n$. $\overline{f}_n \geqslant \overline{f}_{n+1}$, $\underline{f}_n \leqslant \underline{f}_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f}_n(x) = \underline{f}(x)$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n(x) = \overline{f}(x)$. По определению,

$\underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_n(x) \Rightarrow \underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x)$

$\int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n(x)\,d\mu \geqslant c$, $\int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu \leqslant c \Rightarrow$ по т. Леви $\overline{f}$, $\underline{f}$ инт.

и $\lim S_n = \lim \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n(x)\,d\mu$; $\lim s_n = \lim \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu$

$\Rightarrow \int\limits_{[a,b]} \overline{f}(x)\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} \underline{f}(x)\,d\mu \Rightarrow \int\limits_{[a,b]} \underbrace{(\overline{f}(x) - \underline{f}(x))}_{\geqslant 0}\,d\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{f}(x) \overset{\text{п.в.}}{=} \underline{f}(x) \Rightarrow f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} \overline{f}(x) \Rightarrow f(x)$ инт. по Лебегу,

и $L\int\limits_{[a,b]} f(x)\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} \overline{f}\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} \underline{f}\,d\mu = R\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Ч.Т.Д.

Теорема (кр. интегр. по Риману). Пусть $f(x)$ огр, тогда $f(x)$ интегр. на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ почти всюду непрерывна.

Д-во $E = \{f(x)$ не непр.$\}$, $\mu E = 0$.

1) $f(x)$ интегр. по Риману. $] \tilde{E} = \{\underline{f}(x) \neq \overline{f}(x)\}$, $\mu(\hat{E}) = 0$ (см. пред. теорему). Положим $E = \tilde{E} \cup \left\{a + \frac{k}{2^n}(b-a) \quad \begin{matrix} k = 0, \ldots, 2^n - 1 \\ n = 1, 2 \ldots \end{matrix}\right\}$

Ясно, что $\mu(E) = 0$. $\forall x \in [a,b] \setminus E$. Д-м, что $f(x)$ непр-на в х. x - всегда внутреняя точка разбиения, и $\underline{f}(x) = \overline{f}(x) \Rightarrow$ $\lim \overline{f}_n(x) = \lim \underline{f}_n(x)$. $M_k^n - m_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K$: $M_k^n - M_k^n < \varepsilon$, $(x-\delta, x+\delta) \subset [x_k^n, x_{k+1}^n) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ $\forall x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)$

2) $f(x)$ непр. на $[a,b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$. $S_n = (L)\int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n(x) d\mu$, $s_n = (L)\int\limits_{[a,b]} \underline{f_n}(x) d\mu$. Д-м, что их разница будет стремиться к нулю. Сначала, ~~д-м~~ предположим, что $\overline{f}_n(x) - \underline{f_n}(x) \to 0$ (*) $\forall x \in [a,b] \setminus E$. Отметим, что $\overline{f}_n \geq \overline{f}_{n+1}$, $\underline{f_n} \leq \underline{f_{n+1}}$ $\Rightarrow \overline{f}_n(x) - \underline{f_n}(x) \geq \overline{f}_{n+1}(x) - \underline{f_{n+1}}(x)$; $\overline{f}_1(x) - \underline{f_1}(x) \geq \overline{f}_n - \underline{f_n} \Rightarrow (L)\int\limits_{[a,b]}(\overline{f}_1 - \underline{f_1}) d\mu \geq \int\limits_{[a,b]}(\overline{f}_n - \underline{f}_n) d\mu$. По т. Леви, $\int\limits_{[a,b]}(\overline{f}_n - \underline{f}_n) d\mu \to 0 \Rightarrow S_n - s_n \to 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ интегрируема по Риману. Осталось д-ть (*)

Д-м (*) для $\forall x \in [a,b] \setminus \tilde{E}$, $\tilde{E} = E \cup \left\{a + \frac{k(b-a)}{2^n}, \ \begin{matrix} k = 0, 1 \ldots 2^n - 1 \\ n = 1, 2 \ldots \end{matrix}\right\}$

$f(x)$ непр. в $x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ $\forall x' \in (x - \delta, x + \delta)$. Для определенности, $x \in [x_k^n, x_{k+1}^n) \subset (x - \delta, x + \delta)$ рано или поздно $\Rightarrow M_k^n - m_k^n < 2\varepsilon$ (ибо $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x) - f(x')| + |f(x) - f(x'')| < 2\varepsilon$) $\Rightarrow M_k^n - m_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е. $\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) \to 0$.

Ч.Т.Д.

Пример 1. $f(x)$ - непр; $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ = существует по Риману, но не по Лебегу. $(L)\int_0^1 \frac{|\sin(1/x)|}{x}\,dx = \int_{[0,\delta]}\dots d\mu + \int_{[\delta,1]} d\mu$ ② $\forall \delta>0$

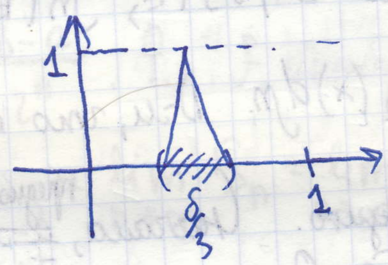
10.09 $\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 16}}$

② $\int_\delta^1 \frac{|\sin 1/x|}{x}\,dx \geq \int_\delta^1 \frac{\sin^2 1/x}{x}\,dx = \int_\delta^1 \frac{1-\cos 2/x}{2x}\,dx =$

$= -\frac{1}{2}\ln\delta - \frac{1}{2}\int_\delta^1 \frac{\cos 2/x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\delta - \frac{1}{2}\left(\int_1^{1/\delta}\frac{\cos 2t}{t}\,dt\right)$

При $\delta\to 0$ это стремится к $+\infty$.

Пример 2. (Гребёнка Кантора) $\int_0^1 |f_n - f_m|\,dx \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ f_n - непр. на $[0,1]$, $\lim f_n = f$ не интегрируема R. Пусть $\delta>0$

$f_1(x) =$  ; $f_2 =$ 

и т. д., а сколько мы выкинули? $\frac{\delta}{3}+\dots+\frac{2\delta}{3}+\dots+\frac{2^n}{3^n}\delta+\dots = \delta$. $K_\delta = [0,1]\setminus\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k) = 1-\delta$. (при этом оно не содержит ни одного интервала!)

$\int_0^1 \underbrace{(f_{n+m}-f_n)}_{\geq 0}\,d\mu \leq \frac{1}{2}\left(\delta\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\dots+\delta\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)+\dots\right) = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{\frac{1}{3}}$

↑ пол-прямоугольника

$= \frac{\delta}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n$ фундаментальна.

Однако, почему $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ не инт. по Риману? Ибо она не всюду непрерывна: $f(x) = 0$ на ~~осях~~ нижних вершинах и 1 в серединках, а серединки и нижние вершины сколь угодно близко сближаются.

§ 8 Пространство $L_1[0,1]$.

$X = [0,1]$ (или интерв.); μ - сигма-адд. мера Лебега; Σ - сигма-алгебра измер. множеств

Опр. $f \in L_1$, если оно инт. по Лебегу; $\|f\| = \int\limits_{(0,1)} |f(x)|\,dx$. Проверим:

1) $\|f\| \geq 0$: очевидно; $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (под нулём мы понимаем ноль почти всюду)

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ Очевидно

3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (ибо $|f+g| \leq |f| + |g|$)

А полно ли это пространство?

Теорема. Если $\|f_n - f_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, то $\exists f \in L_1$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Д-во Пусть f_{n_k} - подпоследов-ть, т.ч. $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| \leq \frac{1}{2^k}$.

$f_{n_k} = f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \ldots + (f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$. Пусть $S_k(x) = |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \ldots + |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$ S_k - интегрируемы; $S_k(x) \leq S_{k+1}(x)$ $\forall k$, п. в. x; $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(x) = S(x)$ (∇)

$$\int\limits_{(0,1)} |f_{n_1}|\,dx + \int\limits_{(0,1)} |f_{n_2} - f_{n_1}|\,dx + \ldots + \int\limits_{(0,1)} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|\,dx + \ldots \leq$$

$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \|f_{n_1}\| = 1 + \|f_{n_k}\| \Rightarrow S(x)$ интегр. по теореме Леви. (или следствию) В силу (∇), $f_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f$ (ибо сход. по модулю), $|f_{n_k}(x)| \leq S(x)$ $\forall k$, п. в. x. По т. Лебега, $\int\limits_{(0,1)} |f_{n_k} - f|\,dx \to 0$. (ибо $|f_{n_k} - f| \leq 2S(x)$).

Значит, $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ч.Т.Д.

Теорема. Если $f \in L_1$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ простая ф-ия с конечным числом значений g, т.ч. $\|f - g\| < \varepsilon$.

Д-во. $\sup\limits_{0 \leq \varphi \leq f} \int\limits_X \varphi(x)\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu$; $\forall \varepsilon > 0$ сущ. пр-я с конечным числом значений, т.ч. $|\int\limits_X f\,d\mu - \int\limits_X \varphi\,d\mu| < \varepsilon$. Ч.Т.Д.

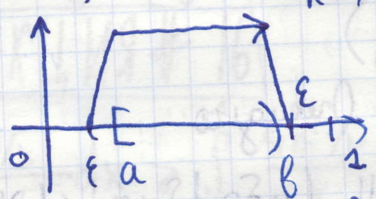
Теорема. Пусть μ-длина; $f \in L_1(0,1)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ непр. $g(x)$ что $\|f - g\| < \varepsilon$.

Д-во 1) $\forall \varepsilon > 0$ сущ. простая $g(x)$, $\|f - g\| \varepsilon$; $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} g^k \mathcal{X}_{A_k}(x)$.

2) $\mathcal{X}_A(x)$; A-измеримое, по кр. измеримости сущ. элемен. B, т.ч. $\mu(A \triangle B) < \varepsilon_1$. $|\mathcal{X}_A(x) - \mathcal{X}_B(x)| \neq 0$ на $A \triangle B$;

$\int\limits_{(0,1)} |\chi_A - \chi_B|\,dx = \int\limits_{A\triangle B} 1\,dx = \mu(A\triangle B) < \varepsilon_1$. Но раз B – элементарно, то $B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$; $\chi_B(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_{[a_k,b_k)}(x)$

3) $\chi_{[a_k, b_k)}$



$\varphi(x)$ – трапеция

$\varphi(x) - \chi_{[a,b)}(x) \neq 0$ на $(a-\varepsilon, a)$ и $(b, b+\varepsilon) \Rightarrow \int\limits_{[0,1]} (\varphi(x) - \chi_{[a,b)}(x))\,dx = 2\varepsilon_1$. Ч.Т.Д.

<u>Теорема.</u> Пусть $f(x) \in L_1[0,1]$, μ-длина. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: как только $|\Delta| < \delta$, то $\int\limits_{(0,1)} |f(x+\Delta) - f(x)|\,dx < \varepsilon$.

(непр. в метрике L_1)

(если вылезли за $(0,1)$, то считаем $f = 0$)

<u>Д-во.</u> Итак, $f \equiv 0$ вне $[0,1]$. Р-м $L(-1,2)$. По предыдущей теореме, $\forall \varepsilon > 0\ \exists g(x)$ – непр. на $[-1,2]$, $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

$$\int\limits_{[0,1]} |f(x+\Delta) - f(x)|\,dx \underset{(|\Delta|<1)}{\leq} \int\limits_{[0,1]} |\underbrace{f(x+\Delta) - g(x+\Delta)}_{<\varepsilon_1}|\,dx + \int\limits_{[0,1]} |g(x+\Delta) - g(x)|\,dx + \int\limits_{[0,1]} |\underbrace{g(x) - f(x)}_{<\varepsilon}|\,dx.$$

$\int\limits_{(0,1)} |g(x+\Delta) - g(x)|\,dx$: $g(x)$ непр $\Rightarrow$ равн. непр $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$: как только $|\Delta| < \delta$, то $|g(x+\Delta) - g(x)| < \varepsilon$.

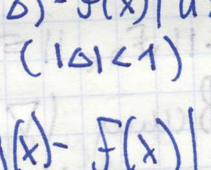
§9 <u>Пространство $L_p(X)$, $p \geq 1$.</u>

<u>Опр.</u> $f \in L_p$, если $\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu$ существует. (т.е. $|f|^p$ интегр.)

$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}$. Проверим. 1), 2) очевидны; д-м нер-во треугольника.

<u>Лемма.</u> Пусть $a, b > 0$; $p \geq 1$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; Тогда $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

<u>Д-во.</u> Р-м



$S_2 = \int\limits_0^b x^{q-1}\,dx = \frac{b^q}{q}$. Значит, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Ч.Т.Д.

$S_1 = \int\limits_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p}$.

[Зам]ечание. $ab=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \Leftrightarrow a^{p-1}=b.$ 27.10.09

ЛЕКЦИЯ #17

[Те]орема (Н-во Гёльдера). $f \in L_p$, $g\in L_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$. Тогда $f\cdot g$ интегрируема и $\int\limits_X |f\cdot g|\,d\mu \leq \|f\|_{L_p}\cdot\|g\|_{L_q}$.

[Д]-во. Пусть $\|f\|_{L_p}\neq 0$, $\|g\|_{L_q}\neq 0$. Обозначим $F(x)=\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_p}}$, $G(x)=\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L_q}}$. $F, G\geq 0$. Тогда $F\cdot G\leq \frac{F^p}{p}+\frac{G^q}{q}$,

причем F^p и G^q - интегр. $\Rightarrow F\cdot G$ интегр $\Rightarrow f\cdot g$ интегр.

$\int\limits_X F\cdot G\,d\mu \leq \frac{1}{p}\int\limits_X F^p\,d\mu+\frac{1}{q}\int\limits_X G^q\,d\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

$\int\limits_X \frac{|f|\cdot|g|}{\|f\|_{L_p}\|g\|_{L_q}}\,d\mu\leq 1 \Rightarrow \int\limits_X |f\cdot g|\,d\mu\leq \|f\|_{L_p}\cdot\|g\|_{L_q}$ Ч.Т.Д.

Замечание. 1) Нер-во превр. в равенство $\Leftrightarrow$ $F^{p-1}=G$ п.в. или $|f|^{p-1}=C|g|$ $\forall x\in X$.

2) При $p=q=2$ Нер-во Гёльдера превращается в неравенство К.Б.Ш.

3) Если $p_k>1$, $k=1,\dots,m$, $\frac{1}{p_1}+\dots+\frac{1}{p_m}=1$, $f_k\in L_{p_k}$, то $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_m$ - интегрируема, причем

$\int\limits_X |f_1\cdot\ldots\cdot f_m|\,d\mu\leq \|f_1\|_{L_{p_1}}\cdot\ldots\cdot\|f_m\|_{L_{p_m}}$

Теорема (Нер-во Минковского). Если $f,g\in L_p$, то $(f+g)\in L_p$ и $\|f+g\|_{L_p}\leq\|f\|_{L_p}+\|g\|_{L_p}$, причем неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow$ $f=c\cdot g$ п.в.

Д-во. $|f+g|^p\leq 2^p(|f|^p+|g|^p) \Rightarrow f+g$ интегр.

$\|f+g\|^p_{L_p}=\int\limits_X|f+g|^p\,d\mu=\int\limits_X|f+g|^{p-1}|f+g|\,d\mu\leq$

$\leq\int\limits_X|f+g|^{p-1}|f|\,d\mu+\int\limits_X|f+g|^{p-1}|g|\,d\mu \overset{\text{н-во Гёльдера}}{\leq} \|f\|_{L_p}\cdot\left(\int\limits_X|f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{1/q}=$

$\cdot\left(\int(f+g)^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{1/q}+\|g\|_{L_p}\left(\int\limits_X|f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{1/q}=$

$= (\|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_q}) \left(\int\limits_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/q} \Rightarrow \left(\int\limits_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq$

$\leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_p}$. Заметим, что $|f+g| = |f| + |g|$, ~~при~~ то (или)

$\mathrm{sgn}(f) \overset{\text{п.в}}{=} \mathrm{sgn}(g(x))$; кроме того, $|f|^{p-1} \overset{\text{п.в}}{=} |f+g|^{p-1} \cdot C_1$

и $|g|^{p-1} \overset{\text{п.в}}{=} |f+g|^{p-1} C_2 \Rightarrow |f| \overset{\text{п.в}}{=} C \cdot |g|$. Ч.Т.Д

<u>Замечание.</u> Если $f_1, \ldots, f_m \in L_p$, то $f_1 + \ldots + f_m \in L_p$ и $\|f_1 + \ldots + f_m\| \leq$

$\leq \|f_1\|_{L_p} + \ldots + \|f_m\|_{L_p}$.

§10 Пространство l_p. Полнота пр-ва L_p.

Тут живут элементы вида $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, т.ч.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. $\|x\|_{l_p} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Справедливо нер-во Гёльдера: $x, y \in l_p \Rightarrow \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$(x \cdot y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n, \ldots))$. Так же справедливо нер-во Минковского: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

<u>Теорема.</u> Пр-во L_p полно. ($\forall$ фунд. п-ть есть сход-ся п-ть)

<u>Д-во.</u> 1) $\mu(X) < \infty$. $\forall f \in L_p$ $f \in L_1$ (т.е. $L_p \subset L_1$), ибо

$\int\limits_X |f| d\mu \leq \|f\|_{L_p} \cdot \left(\int\limits_X 1^q \, d\mu\right)^{1/q}$. Пусть f_n - фунд-на

т.е. $\|f_n - f_m\| \longrightarrow 0$ при $n, m \longrightarrow \infty$. Выберем подп-ть

$f_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$. Пусть $F_k(x) = f_{n_k}(x)$, F_k - фунд. в L_p

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n \geq N \;\; \|F_n - F_{n+m}\|_{L_p} < \varepsilon \;\; \forall m \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_X |F_n - F_{n+m}|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow |F_n - F_{n+m}|^p \longrightarrow |F_n - f|^p$

при $m \to \infty$. По т. Фату, $|F_n - f|^p$ - интегр. и

$\int\limits_X |F_n - f|^p d\mu \leq \varepsilon^p$. Тогда $(f - F_n) + F_n = f \in L_p$,

$\|F_n - f\|_{L_p} \leq \varepsilon$, $n \geq N$. $\Rightarrow \|f_{n_k} - f\|_{L_p} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_{L_p} \longrightarrow 0$.

2) $\mu(X)=\infty$; $X=\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, $\mu(X_k)<\infty$. f_n фунд. в $L_p \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n$ фунд. в $L_p(X_k)$

X_1: сход. п.в. $f_{11}, \dots, f_{1n}, \dots$ Положим $F_n = f_{nn}$.

X_n: сход. п.в. $f_{n1}, \dots, f_{nn}, \dots$

Тогда F_n сх-ся п.в. к некоторой f на $X \Rightarrow \|f_n - f\|_{L_p} \to 0$ при $n\to\infty$. Ч.Т.Д.

Теорема. Если $f\in L_p$, то $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ простая $\varphi(x)\in L_p$, принимающая конечное число значений, т.ч. $\|f-\varphi\|<\varepsilon$.

Д-во Пусть $f=f_+ - f_-$, $f_\pm \geq 0$. Так что аппроксимируем положительную функцию. Положим $A_{kn}=\left\{\frac{k}{2^n}\leq f(x)\leq \frac{k+1}{2^n}\right\}$.

$\varphi_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^n}\chi_{A_{kn}}(x)$! $0\leq\varphi_n\leq f$, $f-\varphi_n\leq\frac{1}{2^n}\Rightarrow$

$\varphi_n\to f$ (поточечно). Положим $\tilde\varphi_n=\begin{cases}\varphi_n(x), & \varphi_n(x)\leq n.\\ 0, & \varphi_n(x)>n.\end{cases}$

(т.е. $\tilde\varphi_n$ – ф-ии с конечным числом значений.) $\tilde\varphi_n\to f(x)$

$0\leq\tilde\varphi_n\leq f$; $\tilde\varphi_n^p\leq f^p$ – интегр. $\Rightarrow \tilde\varphi_k^p$ интегр., $\tilde\varphi_n\in L_p$, по т. Лебега $\int\limits_X |f(x)-\tilde\varphi_n(x)|^p d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ч.Т.Д.

Теорема. Пусть X – огр, $d\mu$ – объём, тогда $\forall f\in L_p(X)$ $\exists$ непр. на X ф-я φ, т.ч. $\|f-\varphi\|<\varepsilon$.

Д-во. $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ элем. B: $\mu(A\triangle B)<\varepsilon$; $\int\limits_X|\chi_A(x)-\chi_B(x)|^p dx=\int\limits_{A\triangle B}1^p dx = \mu(A\triangle B)<\varepsilon$. В нашем случае, $B=\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}\Delta_k$ (Δ_k – замкнутые прямоугольники)

Пусть F – замкнуто $\chi_F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)=\frac{1}{1+n\,d(x,F)}$

Ните покажем, что $d(x,F)$ непр-но; $d(x,F)=0 \Leftrightarrow x\in F$

$0\leq f_n(x)\leq 1$, $f_n \to \chi_F$; $|\chi_F - f_n|^p\leq 2^p \Rightarrow$ по т. Лебега

$\int\limits_X |f_n-\chi_F|^p d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ч.Т.Д.

20.10.09

ЛЕКЦИЯ #18

Покажем непр-ть $d(x,F)=\inf\limits_{y\in F} d(x,y)$. Нер-во треугольника: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)\ \forall x,y,z \Rightarrow d(x,y^*)\leq d(x,z)+d(z,y^*)$ (на y^* достигается inf). Т.к. $d(x,y^*)\leq d(z,z)+d(z,F)$, то $\inf\limits_{\bar y\in F} d(x,\bar y)\leq d(x,y^*)\leq d(x,z)+d(z,F)\Rightarrow d(x,F)\leq d(x,z)+d(z,F)$

$\Rightarrow d(x,F)-d(z,F)\leq d(x,z)$. Аналогично, меняя x и z,

$d(z,F)-d(x,F)\leq d(z,x)\Longrightarrow |d(z,F)-d(x,F)|\leq d(z,x)$

__Теорема.__ Если $f\in L_p(X)$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta$, т.ч. как только $|\Delta|<\delta$, то $\|f(\cdot+\Delta)-f(\cdot)\|_{L_p}<\varepsilon$. по мере dx.

__Д-во.__ 1) Дост-но д-ть для X-огр. (Иначе, $\int\limits_X |f(x)|^p dx<\infty \Rightarrow \int\limits_{|x|>R} |f|^p dx \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ (Остаток сх. ~~шар~~ ряда). Так что всегда можно найти шар, т.ч. $\|f(\cdot+\Delta)\|_{|x|>R}<\varepsilon$, $\|f(\cdot)\|_{|x|>R}<\varepsilon$)

2) Итак, пусть X-огр; пусть оно содер. в шаре радиуса R ($f\equiv 0$ вне X). В шаре $\exists\varphi$ - непр., $\|f-\varphi\|_{L_p(|x|<R+1)}<\varepsilon$, $\varphi(x)$ непр. в замкнутом шаре рад. $R+1$.

Берем произвольное $\varepsilon>0$. $\|f(\cdot+\Delta)-f(\cdot)\|_{L_p(|x|<R)} \leq$

Возьмем $|\Delta|<1$; $\leq \underbrace{\|f(\cdot+\Delta)-\varphi(\cdot+\Delta)\|_{L_p(|x|<R)}}_{<\varepsilon}$

$+\underbrace{\|\varphi(\cdot+\Delta)-\varphi(\cdot)\|_{L_p(|x|\leq R)}}_{<\varepsilon \text{ в силу непр-ти}}+\underbrace{\|\varphi(\cdot)-f(\cdot)\|_{L_p(|x|<R)}}_{<\varepsilon}$

$\exists\delta$, $|\Delta|<\delta$ и всё хорошо. Ч.Т.Д.

§11 Заряды.

Обобщения меры.

__Опр.__ Зарядом $\Phi(A)$, заданном на сигма-алгебре Σ, называется отображение $\Sigma\to\mathbb{R}$, т.ч. $\Phi\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Phi(A_k)$

Это определение требует абсолютной сходимости ряда.

__Пример.__ Пусть f интегр. по X, $\phi(A) = \int\limits_A f\,d\mu$, где A-измеримо.

$$\phi(A) = \int\limits_{X^+\cap A} f\,d\mu + \int\limits_{X^-\cap A} f(x)\,d\mu, \text{ где } X^+ = \{f(x) \geq 0\},\ X^- = \{f(x) < 0\}$$

$\mu(A) = \int\limits_{X^+\cap A} f\,d\mu$, $\nu(A) = -\int\limits_{X^-\cap A} f\,d\mu$, μ, ν - сигма-адд. меры

$\phi(A) = \mu(A) - \nu(A)$.

__Опр.__ Множество $A \in \Sigma$ наз-ся положительным (отрицательным) относительно заряда $\phi(A)$, если $\forall B \subset A$, $B \in \Sigma$, $\phi(B) \geq 0$ ($\phi(B) \leq 0$)

__Лемма.__ $\forall A \in \Sigma$ $\sup\limits_{B\subset A} |\phi(B)| < \infty$.

__Д-во.__ 1) $\sup\limits_{B\subset A} |\phi(A)| = \bar{\Phi}(A)$. От противного: пусть $\bar{\Phi}(A) = \infty$. Тогда $\exists B_1 \subset A$, $|\phi(B_1)| \geq 1$; потребуем также $|\phi(A) - \phi(B_1)| \geq 1$.

Либо $\bar{\Phi}(B_1) = +\infty$ (тогда берем $A_1 = B_1$), либо $\bar{\Phi}(A \setminus B_1)$ (тогда берем $A_1 = A \setminus B_1$) $|\phi(B_1)| \geq 1 \Rightarrow |\phi(A_1)| \geq 1$. $A_1 = A \setminus B_1 \Rightarrow |\phi(A_1)| = |\phi(A \setminus B_1)| \overset{(=)}{\geq} |\phi(A) - \phi(B_1)| \geq 1$ - сделаем так, потребовав $|\phi(B_1)| \geq 1$, $|\phi(A) - \phi(B_1)| \geq 1$.

2) $\bar{\Phi}(A_1) = +\infty \Rightarrow \exists B_2 \subset A_1$, $|\phi(B_2)| \geq 2$, т.ч. $||\phi(A_1)| - \phi(B_2)|| \geq 2$.

Повторяем предыдущий шаг. $\bar{\Phi}(B_2) = +\infty$, то $A_2 = B_2$; иначе $A_2 = A_1 \setminus B_2$. В любом случае $|\phi(A_2)| \geq 2$.

Повторяем эти действия до бесконечности. Получим:

$A \supset A_1 \supset A_2 \ldots\ldots \supset A_n \supset \ldots$ $\bar{\Phi}(A_n) = +\infty$; $\phi(A_n) \geq n$;

$\tilde{A} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\tilde{A} \in \Sigma \Rightarrow \bar{\Phi}(\tilde{A})$ конечен; но $\bar{\Phi}(\tilde{A}) = \lim \phi(A_n)$ (аналог св-ва непр-ти меры) (?!) Ч.Т.Д.

__Теорема (Жордана)__ Если ϕ-заряд, то $\exists X^+, X^-$, $X^+X^- = \varnothing$, $X = X^+ \sqcup X^-$; X^+ положит. относ. ϕ подмно-во, X^- отриц. относ. ϕ

__Д-во.__ 1) Если $\phi(A) < 0$, то $\exists$ отр. мн-во $A_0 \subset A$, и заряд $\phi(A_0) \leq \phi(A)$

Если $\phi(B) < 0$ $\forall B \subset A$, то все д-но; иначе, $\exists B \subset A$, $\phi(B) > 0$.

Положим $S\phi(A) = \sup\limits_{B\subset A} \phi(B)$, $S\phi(A) > 0$, $S\phi(A)$ конечен в силу леммы. $\exists B_1 \subset A: \phi(B_1) \geq S\phi(A) - \frac{1}{2},\ \phi(B_1) > 0$

Берём $A_1 = A \setminus B_1,\ A_1 \subset A,\ \phi(A_1) = \phi(A\setminus B_1) = \phi(A) - \phi(B_1) <$
$< \phi(A)$. Аналогично, если $S\phi(A_1) \leq 0$, то все д-но, $A_0 = A_1$;
иначе, сущ. $B_2 \subset A_1,\ \phi(B_2) \geq S\phi(A_1) - \frac{1}{2^2};\ \phi(B_2) > 0;$

$A_2 = A_1 \setminus B_2,\ A_2 \subset A_1,\ \phi(A_2) = \phi(A_1) - \phi(B_2) < \phi(A_1)$

Если процесс пошел до бесконечности, то $A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. D-м,
что A_0 - отриц. мн-во. В противном случае $\exists B \subset A_0$:
$\phi(B) > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: \frac{1}{2^m} < \phi(B)$. Р-м $B_m \sqcup B$ ($B_m B =$
$= \varnothing$, ибо $B \subset A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_{m-1} \setminus B_m = A_m$), $\phi(B_m \sqcup B) =$

$= \phi(B_m) + \phi(B) \geq S\phi(A_{m-1}) - \frac{1}{2^m} + \phi(B) > S\phi(A_{m-1})$

Тогда $B_m \sqcup B \subset A_{m-1};\ \underset{\sup \phi(B)}{\underset{\shortparallel}{S\phi(A_{m-1})}} < \phi(B \sqcup B_m)$ (?!)

2) Докажем, что $\inf\limits_{A \subset X} \phi(A) = b$ - конечное число в силу леммы. Если $b \geq 0$, то $X = X^+$ и все док-но; иначе, $b < 0$, то $\exists A_n \subset X,\ \phi(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. (считаем, что $\phi(A_n) < 0$)
В силу 1) имеем: $\exists \tilde{A}_n \subset A_n,\ \tilde{A}_n$ - отрицательные;
$\phi(\tilde{A}_n) \leq \phi(A_n);\ \phi(\tilde{A}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Положим $X^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n$.
Покажем, что $X^+ = X \setminus X^-$ - положительное. Пусть это не так, $\exists B \subset X^+,\ \phi(B) < 0$. Тогда $\exists \tilde{B} \subset B,\ \tilde{B}$ - отриц,
$\phi(\tilde{B}) \leq \phi(B)$. К A_n добавим $\tilde{B}$, $A_n \sqcup \tilde{B}$. Заряд
$\phi(A_n \sqcup \tilde{B}) = \phi(A_n) + \phi(\tilde{B}) \longrightarrow b + \phi(B) < b$ (?!), что
b - инфинум. Ч.Т.D.

<u>Замечание.</u> Разложение в т. не единственно.

05.11.09

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 19}}$

<u>Следствие.</u> Если ϕ - заряд, заданный на Σ, то $\exists$ меры μ, ν:
$\phi(A) = \nu(A) - \mu(A)\ \forall A \in \Sigma$.

Д-во $X = X^+ \sqcup X^-$; $A = (AX^+) \sqcup (AX^-) \Rightarrow \Phi(A) = \Phi(AX^+) + \Phi(AX^-) =$
$= \nu(A) - \mu(A)$, где $\mu(A) = \Phi(AX^-)$, $\nu(A) = \Phi(AX^+)$. Ч.Т.Д.

§12 Теорема Радона–Никодима

Пусть μ, ν – сигма-адд. меры. Вопрос: а когда сущ f, т.ч. $\nu(A) = \int\limits_A f\,d\mu$? Она существует не всегда. Пусть $d\mu = dx$, положим

$\nu(A) = \begin{cases} 1, 0 \in A \\ 0, 0 \notin A \end{cases}$. Предположим, что $\nu(A) = \int\limits_A f\,dx$; $0 \in A \Rightarrow 1 = \int\limits_A f\,dx$, устремим A к 0: $\int\limits_A f\,dx \to 0$, $1 \not\to 0$.

Теорема. Пусть μ, ν – сигма-адд. меры на Σ. Если $\nu(A)$ абс.-непр. относ. $\mu(A)$, то $\exists f$: $\nu(A) = \int\limits_A f\,d\mu$ $\forall A \in \Sigma$.

Док-во. **Лемма** $\nu(A)$ абс. непр. отн. $\mu(A)$, ν, μ-сигма-адд на Σ; Пусть $\nu(X) > 0$. Тогда $\exists B \in \Sigma$, $\mu(B) > 0$, $\exists \delta > 0$: $\nu(A) \geq \delta\mu(A)$ $\forall A \in \Sigma$, $A \subset B$.

Док-во Вспомним, что ν абс. непр. отн. μ, то из $\mu(A) = 0$ следует, что $\nu(A) = 0$. Р-м заряды $\Phi_n(A) = \nu(A) - \frac{1}{n}\mu(A)$
По т. Хардана, $X = X_n^+ \sqcup X_n^-$. Покажем, что $X_n^+ \subset X_{n+1}^+$ $\forall n$. Берём произвольное $A \subset X_n^+$, $\Phi_n(A) \geq 0$;
$\Phi_{n+1}(A) = \nu(A) - \frac{1}{n+1} > \Phi_n(A) \geq 0 \Rightarrow A \in X_{n+1}^+$.
Значит, $X_n^- \supset X_{n+1}^-$ $\forall n$; введём $\tilde{X} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n^-$;
$\Phi_n(X_n^-) \leq 0$; $0 \geq \Phi_n(X_n^-) = \nu(X_n^-) - \frac{1}{n}\mu(X_n^-) \Rightarrow$
$\Rightarrow \nu(X_n^-) \leq \frac{1}{n}\mu(X_n^-)$. В силу убывания X_n^-, $\nu^m(X_n^-) \leq \nu^m(X_1^-)$, тогда $\nu(X_n^-) \leq \frac{1}{n}\mu(X_n^-) \leq$
$\leq \frac{1}{n}\mu(X_1^-) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \nu(X_n^-) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\nu(\tilde{X}) =$
$= \lim \nu(X_n^-) = 0$. Пусть $X = \tilde{X} \sqcup (X \setminus \tilde{X}) =$
$= \tilde{X} \sqcup (X \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n^-) = \tilde{X} \sqcup \left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus X_n^-)\right] = \tilde{X} \sqcup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^+)$

силу леммы. $\exists B_1 \subset A: \phi(B_1) \geqslant S\phi(A) - \frac{1}{2}, \ \phi(B_1) > 0$

Берём $A_1 = A \setminus B_1$, $A_1 \subset A$, $\phi(A_1) = \phi(A \setminus B_1) = \phi(A) - \phi(B_1) <$
$< \phi(A)$. Аналогично, если $S\phi(A_1) \leqslant 0$, то все д-но, $A_0 = A_1$;
иначе, сущ. $B_2 \subset A_1$, $\phi(B_2) \geqslant S\phi(A_1) - \frac{1}{2^2}$; $\phi(B_2) > 0$;

$A_2 = A_1 \setminus B_2$, $A_2 \subset A_1$, $\phi(A_2) = \phi(A_1) - \phi(B_2) < \phi(A_1)$

Если процесс пошел до бесконечности, то $A_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Д-м, что A_0 - отриц. мн-во. В противном случае $\exists B \subset A_0$: $\phi(B) > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: \frac{1}{2^m} < \phi(B)$. Р-м $B_m \sqcup B$ ($B_m B = \varnothing$, ибо $B \subset A_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_{m-1} \setminus B_m = A_m$), $\phi(B_m \sqcup B) =$

$= \phi(B_m) + \phi(B) \geqslant S\phi(A_{m-1}) - \frac{1}{2^m} + \phi(B) > S\phi(A_{m-1})$

Тогда $B_m \sqcup B \subset A_{m-1}$; $\underbrace{S\phi(A_{m-1})}_{\sup \phi(B)} < \phi(B \sqcup B_m)$ (?!)

2) Докажем, что $\inf\limits_{A \subset X} \phi(A) = b$ - конечное число в силу леммы. Если $b \geqslant 0$, то $X = X^+$ и всё док-но; иначе $b < 0$, то $\exists A_n \subset X$, $\phi(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. (считаем, что $\phi(A_n) < 0$)

В силу 1) имеем: $\exists \tilde{A}_n \subset A_n$, $\tilde{A}_n$ - отрицательные;
$\phi(\tilde{A}_n) \leqslant \phi(A_n)$; $\phi(\tilde{A}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Положим $X^- = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n$.

Покажем, что $X^+ = X \setminus X^-$ - положительное. Пусть это не так, $\exists B \subset X^+$, $\phi(B) < 0$. Тогда $\exists \tilde{B} \subset B$, $\tilde{B}$ - отриц,
$\phi(\tilde{B}) \leqslant \phi(B)$. К A_n добавим $\tilde{B}$, $A_n \sqcup \tilde{B}$. Заряд
$\phi(A_n \sqcup \tilde{B}) = \phi(A_n) + \phi(\tilde{B}) \longrightarrow b + \phi(B) < b$ (?!), что b-инфимум. Ч.Т.Д.

Замечание. Разложение в т. не единственно.

05.11.09

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ № 19}}$

Следствие. Если ϕ - заряд, заданный на Σ, то $\exists$ меры μ, ν:
$\phi(A) = \nu(A) - \mu(A) \ \forall A \in \Sigma$.

Д-во $X = X^+ \sqcup X^-$; $A = (AX^+) \sqcup (AX^-) \Rightarrow \Phi(A) = \Phi(AX^+) + \Phi(AX^-) =$
$= \nu(A) - \mu(A)$, где $\mu(A) = \Phi(AX^-)$, $\nu(A) = \Phi(AX^+)$. Ч.Т.Д.

§12 Теорема Радона - Никодима

Пусть μ, ν - сигма-адд. меры. Вопрос: а когда сущ f, т.ч. $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$? Она существует не всегда. Пусть $d\mu = dx$, положим $\nu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$ Предположим, что $\nu(A) = \int_A f\,dx$; $0 \in A \Rightarrow 1 = \int_A f\,dx$, устремим $A \kappa 0$: $\int_A f\,dx \longrightarrow 0$, $1 \not\to 0$.

Теорема. Пусть μ, ν - сигма-адд. меры на Σ. Если $\nu(A)$ абс.-непр. относ. $\mu(A)$, то $\exists f$: $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$ $\forall A \in \Sigma$.

Док-во. **Лемма** $\nu(A)$ абс. непр. отн. $\mu(A)$, ν, μ - сигма-адд на Σ; $\exists\, \infty > \nu(X) > 0$. Тогда $\exists B \in \Sigma$, $\mu(B) > 0$, $\exists \delta > 0$: $\nu(A) \geqslant \delta\mu(A)$ $\forall A \in \Sigma$, $A \subset B$.

Док-во Вспомним, что ν абс. непр. отн. μ, то из $\mu(A) = 0$ следует, что $\nu(A) = 0$. Р-м заряды $\Phi_n(A) = \nu(A) - \frac{1}{n}\mu(A)$. По т. Жордана, $X = X_n^+ \sqcup X_n^-$. Покажем, что $X_n^+ \subset X_{n+1}^+$ $\forall n$. Берём произвольное $A \subset X_n^+$, $\Phi_n(A) \geqslant 0$;
$\Phi_{n+1}(A) = \nu(A) - \frac{1}{n+1} > \Phi_n(A) \geqslant 0 \Rightarrow A \in X_{n+1}^+$.
Значит, $X_n^- \supset X_{n+1}^-$ $\forall n$; введём $\tilde{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^-$;
$\Phi_n(X_n^-) \leqslant 0$; $0 \geqslant \Phi_n(X_n^-) = \nu(X_n^-) - \frac{1}{n}\mu(X_n^-) \Rightarrow$
$\Rightarrow \nu(X_n^-) \leqslant \frac{1}{n}\mu(X_n^-)$. В силу убывания X_n^-, $\nu^m(X_n^-) < \nu^m(X_1^-)$, тогда $\nu(X_n^-) \leqslant \frac{1}{n}\mu(X_n^-) \leqslant$
$\leqslant \frac{1}{n}\mu(X_1^-) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \nu(X_n^-) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\nu(\tilde{X}) =$
$= \lim \nu(X_n^-) = 0$. Пусть $X = \tilde{X} \sqcup (X \setminus \tilde{X}) =$
$= \tilde{X} \sqcup (X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^-) = \tilde{X} \sqcup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus X_n^-)\right] = \tilde{X} \sqcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^+)$

т.к. $0<\nu(X)<+\infty$, то $\nu(X)=\underbrace{\mu(\tilde{X})}_{0}+\mu\left(\bigcup X_n^+\right)>0$

$\exists X_m^+ : \nu(X_m^+)>0$ (иначе $\nu(X)=0$). Положим $B=X_m^+$,

$\delta=\frac{1}{m}$. Это верно, ибо $\forall A\subset X_m^+$ $\Phi_m(A)\geq 0$, $\nu(A)-\frac{1}{m}\mu(A)$

≥ 0. (Ибо если $\mu(X_m^+)=0 \Rightarrow \nu(X_m^+)=0 \Rightarrow \mu(X_m^+)>0$ (?!)

Ч.Т.Д.

1) Итак, $\nu(A)$ абс. непр. отн. $\mu(A)$. Рассмотрим класс функций $H=\{f\geq 0,\ f$ инт. на $X,\ \int_A f\,d\mu\leq \nu(A)\ \forall A\subset X\}$

Класс не пуст: $f\equiv 0\in H$. Р-м интеграл $\int_X f\,d\mu$, $f\in H$.

$\int_X f\,d\mu\leq \nu(X)<\infty \Rightarrow \exists \sup\limits_{f\in H}\int_X f\,d\mu = b\leq \nu(X)$. По определению sup, $\exists f_1,\dots,f_n\in H$ $\int_X f_n\,d\mu\longrightarrow b$.

Пусть $\Phi_n(x)=\max[f_1,\dots,f_n]$. Φ_n измерима; $\Phi_n(x)\leq \Phi_{n+1}(x)$ $\forall x,\forall n$. Но принадлежит ли Φ_n H?

Введём мн-во $A_{1n}=\{F_n(x)=f_1(x),\ F_n(x)\neq f_k(x),\ k=2,n\}$

$A_{2n}=\{F_n(x)=f_2(x),\ F_n(x)=f_k(x),\ k=3,\dots,n\}$, ...,

$A_{n-1\,n}=\{F_n(x)=f_{n-1}(x),\ F_n(x)\neq f_n(x)\}$, $A_{nn}=\{F_n(x)=f_n(x)\}$

$X=\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_{kn}$; $\forall A\subset X$ рассмотрим $\int_A F_n(x)\,d\mu=$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{AA_{kn}} F_n\,d\mu=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{AA_{kn}} f_k(x)\,d\mu\leq \sum\limits_{k=1}^{n}\nu(A_{kn}A)=$

$=\nu(A)\Rightarrow F_n\in H$. $F_n\geq\{f_1,\dots,f_n\}$; $\int_X f_n\,d\mu\leq$

$\leq\int_X F_n\,d\mu\leq b\Rightarrow \int_X F_n(x)\,d\mu\longrightarrow b$ (ибо $\int_X f_n\,d\mu\to b$)

$F_n\leq F_{n+1}$; $\int_X F_n\,d\mu\leq b$ $\forall n$; по т. Леви $F_n\to f$, f-интегр., $\int_X f\,d\mu=b$, $f\in H$ (ибо $F_n\in H$).

2) Рассмотрим меру $\Phi(A)=\nu(A)-\int_A f\,d\mu$ (это действительно мера). Рассмотрим два случая.

а) $\phi(X)\equiv 0$: $\nu(A)=\int_A f\,d\mu\ \forall A$, всё доказано.

б) $\phi(X)\not\equiv 0$. По лемме, $\exists B\subset X;\ \delta>0,\ \mu(B)>0$, $\phi(A)\geqslant\delta\mu(A)$ (т.к. ϕ абс. непр. отн. μ). Введём $F(x)=f(x)+\delta\varkappa_B(x)$. Д-м, что $F(x)\in H$. $\int_A F(x)\,d\mu=$

$=\int_A f\,d\mu+\delta\mu(B)\leqslant\int_A f\,d\mu+\phi(AB)=\int_A f\,d\mu-$

$-\nu(AB)+\int_{AB} f\,d\mu=\int_{A\setminus B} f\,d\mu+\nu(AB)\leqslant\nu(A\setminus B)+\nu(AB)=\nu(A)$

Значит, $F\in H$. Подсчитаем $\int_X F(x)\,d\mu=\int_X f\,d\mu+$

$+\delta\int_X \mathbb{1}_B\,d\mu=\int_X f\,d\mu+\delta\mu(B)=b+\delta\mu(B)>b$.

но $\sup_{f\in H}\int_X f\,d\mu=b$ (?!) $\Rightarrow\phi(X)\equiv 0$. ЧТД.

<u>Следствие.</u> Пусть $d\mu=dx$, пусть ν абс. непр. отн. μ и представима в виде $\nu[a,t)=F(t)-F(a)$, где F - неубывающая абс.-непр. функция; $\exists f:\ \nu[a,t)=\int_{[a,t)} f(x)\,dx$

$F(t)-F(a)=\int_{[a,t)} f(x)\,dx$. Пусть f - непрерывна; тогда

$L\int_{[a,t)} f\,dx=R\int_a^t f(x)\,dx$, и $F(t)$ - неопределенный интеграл (формула Ньютона-Лейбница :))

<u>Опр.</u> $\frac{\partial\nu}{\partial\mu}=f$ - производная Радона-Никодима (f из теоремы)

<u>Теорема.</u> Пусть ν абс. непр. отн. μ; $\frac{\partial\nu}{\partial\mu}=\rho$ - произв. Радона-Никодима; пусть f инт. по X по мере ν. Тогда $\rho\cdot f$ интегрируемо по μ, и $\int_X f\,d\nu=\int_X f\cdot\rho\cdot d\mu$.

<u>Д-во</u> Д-но д-ть для $f\geqslant 0$ (ибо $f=f_+-f_-$).

1) $f=\varkappa_A(x)$; $\nu(A)=\int_A\rho\,d\mu=\int_X\varkappa_A\rho\,\partial\nu=\int_A\rho\,d\mu=\int_X\varkappa_A\rho\,d\mu$.

Значит, теорема верна, когда f - простая с конечным числом значений.

2) $f\geqslant 0$. Аппроксимируем простой с кон. числом значений

Положим $A_{nk} = \{\frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}$; $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{A_{nk}}(x)$

(f_{nk} – простая с счётным числом значений). $f_n \le f_{n+1}$, $f_n \to f(x)$, $f_n \le f(x)$. Положим $\tilde{f}_n = \begin{cases} f_n, & f_n \le n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

($\tilde{f}_n$ – простая с конечным числом значений)

$\tilde{f}_n \to f(x)$, $\tilde{f}_n \le f(x)$, $\int\limits_X \tilde{f}_n d\nu = \int\limits_X \tilde{f}_n \rho \, d\mu$. Т.к. $\tilde{f}_n \le f$, f – интегр., то по т. Лебега $\int\limits_X \tilde{f}_n d\nu \to \int f d\nu$

Аналогично, $\int\limits_X \tilde{f}_n \rho \, d\mu \to \int\limits_X f \rho \, d\mu$, ибо $\int\limits_X \tilde{f}_n \rho \, d\mu \le \int\limits_X f d\nu$; $\tilde{f}_n \rho \le \tilde{f}_{n+1} \rho$; $\rho \tilde{f}_n \to \rho f$ (по т. Леви ρf интегр.) Ч.Т.Д.

051109

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 20}}$

§13 Теорема Фубини.

Пусть X, Y – два пространства ("ось"). $A \subset X$, $B \subset Y$, $A \times B = D$.

Лемма. Пусть K_x, K_y – кольца; тогда $K_x \times K_y \equiv K_Z$ – полукольцо ($Z = X \times Y$)

Д-во $D_1 = A_1 \times B_1$, $D_2 = A_2 \times B_2$ ($A_i \in K_x$, $B_i \in K_y$)

1) $D_1 D_2 = (A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = (A_1 A_2) \times (B_1 B_2)$ (легко проверить!)

2) Пусть $D_2 \supset D_1$, $D_2 \setminus D_1 = (A_2 \times B_2) \setminus (A_1 \times B_1) = ((A_2 \setminus A_1) \times B_2) \sqcup [(B_2 \setminus B_1) \times A_1]$. (Это действительно так!)

Введём меру: $\mu_Z(D) = \mu_x(A) \cdot \mu_y(B)$.

Теорема. Если μ_x, μ_y – сигма адд. на K_x и K_y, то μ_Z – сигма-адд на K_x и K_y.

Док-во. $D = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$; $D_i \in K_x \times K_y$. Надо д-ть, что $\mu(D) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(D_i)$.

Введём сечения $D_x = \{y \in Y, (x,y) \in D, x - \text{фикс.}\}$.

$D_x = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} D_{ix} \Rightarrow \mu_y(D_x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_y(D_{ix})$. Отметим, что

$\int\limits_X \sum_{i=1}^{n} \mu_y(D_x)\, d\mu_x$ ограничен: $\bigsqcup_{i=1}^{n} D_{ix} \subset D_x$; $\mu_y\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} D_{ix}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_y(D_x) \leq \mu_y(D_x)$; $\int\limits_X \sum_{i=1}^{n} \mu_y(D_x)\, d\mu_x$; $\sum \mu_z(D_i) \leq \mu_z(D)$. Итак, $\sum_{i=1}^{n} \int\limits_X \mu_y(D_{ix})\, d\mu_x \leq \mu_z(D)$. Из сигма-адд. и т. Леви, $\int\limits_X \sum_{i=1}^{\infty} \mu_x(D_{ix})\, d\mu_x = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_X \mu_y(D_{ix})\, d\mu_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_z(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_z(D_i)$. Ч.Т.Д.

Итак, μ_z – сигма на $K_x \times K_y \Rightarrow$ её можно продолжить на миним. кольцо, а потом – продолжить по Лебегу. Обозначим $\mu_z = \mu_x \otimes \mu_y$ (мера по Лебегу). Отметим, что ~~$\mu_z = \mu_x \otimes \mu_y$~~ $(\mu_x \otimes \mu_y) \otimes \mu_z = \mu_x \otimes (\mu_y \otimes \mu_z)$

__Лемма.__ Пусть K – кольцо элементов, μ – задана на K и продолжена по Лебегу. Пусть $C \subset X$, C – изм. по Лебегу; тогда $\exists A \supset C$: $\mu(C) = \mu(A)$, где $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{in}$, $B_{in} \supset B_{(i+1)n}$, $B_{in} \in K$.

__Д-во.__ $\mu^*(C) = \inf\limits_{\text{покрытия}} \sum_{i=1} m(B_i)$. $\exists\, \widetilde{B}_{in} \in K$: $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{B}_{in}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\widetilde{B}_{in}) \leq \mu(C) + \frac{1}{n}$. Положим $\widetilde{A}_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{B}_{in}$. Ясно, что $C \subset \widetilde{A}_n$, $\mu(\widetilde{A}_n) \leq \mu(C) + \frac{1}{n}$. Положим $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k$. Понятно, что $A_n \supset A_{n+1}$, обозначим $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$; $C \subset A$, $\mu(C) \leq \mu(A)$.

Но $A \subset A_n \subset \widetilde{A}_n$ $\forall n \Rightarrow \mu(C) \leq \mu(\widetilde{A}_n) \leq \mu(C) + \frac{1}{n}$.

$\mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(\widetilde{A}_n) \leq \mu(C) + \frac{1}{n}$. Устремим n к ∞

$\mu(C) = \mu(A)$. Осталось д-ть, что $A_N = \bigcap_{n=1}^{N} \widetilde{A}_n = \bigcap_{n=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{B}_{in}$.

Введем $B_{jn} = \bigcap_{n=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{j} B_{in}$. Тогда $B_{ij} \in K$, $\widetilde{A}_n = \bigcap_{n=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{in} = \bigcap_{n=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{m} B_{in}$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_{mN} = \widetilde{A}_N$, $B_{mN} \subset B_{m+1\,N}$, $B_{mN} \in K$ Ч.Т.Д.

__Теорема.__ $C \subset X \times Y$ – измер. отн. $\mu_x \otimes \mu_y$; тогда для п.в. x C_x измерима отн. μ_y, $\mu_y(C_x)$ – интегр. по μ_x, и $\mu_x \otimes \mu_y(C) =$

$= \int\limits_X \mu_y(C_x)\, d\mu_x.$

<u>Д-во</u> Пусть $A \subset C$; $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_{in}$; $A_{i+1} \subset A_i$, $B_i \subset B_{i+1}$.

1) Пусть $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in \mathcal{K}$. $D_x = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_{ix}$, $B_{ix} \subset B_{i+1\,x}$. Тогда каждое сечение B_{ix} изм отн. μ_y; $D_x = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{ix}$ — тоже измеримо $\forall x$ отн. μ_y. Посчитаем меру $\mu_y(D_x) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu_y(B_{ix})$. Отметим, что $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, B_i — изм. отн. $\mu_x \otimes \mu_y$, $B_i \subset B_{i+1}$, и, в силу непр-ти $\mu_x \otimes \mu_y$, $\mu_x \otimes \mu_y(D) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu_x \otimes \mu_y(B_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_X \mu(B_{ix})\, d\mu_x$. По т. Леви, $\mu_x \otimes \mu_y(D) = \int\limits_X \mu_y(D_x)\, d\mu_x$

2) $A_n : A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, для A_n ф-ла справедлива. A_x изм. отн. μ_y $\forall x \Rightarrow \mu_x \otimes \mu_y(A) = \int\limits_X \mu_y(A_x)\, d\mu_x$; д-во аналогично

3) Пусть $\mu_x \otimes \mu_y(C) = 0$. Тогда $\exists A : C \subset A$, $\mu_x \otimes \mu_y(A) = \mu_x \otimes \mu_y(C) = 0$, и A_x — измер. $\forall x$ отн. μ_y, $\mu_x \otimes \mu_y(A) = \int\limits_X \mu_y(A_x)\, d\mu_x$. Значит, $\mu_y(A_x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow \mu_y(C_x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$

$\int\limits_X \mu_y(C_x)\, d\mu_x = 0 \Rightarrow 0 = \mu_x \otimes \mu_y(C) = \int\limits_X \mu_y(C_x)\, d\mu_x$

4) C — измеримо, $\mu_x \otimes \mu_y(C) > 0 \Rightarrow \exists A \supset C : \mu_x \otimes \mu_y(C) = \mu_x \otimes \mu_y(A)$; $A = C \sqcup \underbrace{(A \setminus C)}_{E} = C \sqcup E$, $\mu_x \otimes \mu_y(E) = 0$. Р-м сечение $A_x = C_x \sqcup E_x \Rightarrow A_x$ измер. $\forall x$, E_x п.в. x; C_x измер. для п.в. X; $\mu_y(C_x) \overset{\text{п.в.}}{=} \mu_y(A_x) \Rightarrow \mu_x \otimes \mu_y(C) = \mu_x \otimes \mu_y(A) \overset{2)}{=} \int\limits_X \mu_x(A_x)\, d\mu_y = \int\limits_X \mu_y(C_x)\, d\mu_x \Rightarrow$

$\mu_x \otimes \mu_y(C) = \int\limits_X \mu_y(C_x)\, d\mu_x$. Ч.Т.Д.

<u>Следствие.</u> Пусть $f \geq 0$ — интегр. на X; пусть $C = \{(x,t) : 0 \leq t \leq f(x),\ x \in X\}$ (криволинейная трапеция). Тогда

$\mu_x \otimes \mu_t(C) = \int\limits_X f(x)\, d\mu_x.$

Теорема (Фубини) • Пусть $f(x,y)$ интегр. по $\mu_x\otimes\mu_y$ на $X\times Y$. Тогда для п. в. x $f(x,y)$ инт. по μ_y, $\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y$ — инт. по x, и $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu_x\otimes\mu_y = \int\limits_X\left[\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y\right]d\mu_x = \int\limits_Y\left[\int\limits_X f(x,y)\,d\mu_x\right]d\mu_y$.

• Если, ~~помимо того,~~ $f(x,y)\geq 0$, и $\exists \int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y\,d\mu_x$, то $f(x,y)$ инт. по $\mu_x\otimes\mu_y$, и повт. интегралы равны.

10.11.09

ЛЕКЦИЯ #21

Д-во. 1) Введём $C=\{(x,y,t): 0\leq f(x,y)\leq t,\ (x,y)\in X\times Y\}$ в предположении, что $f\geq 0$.

В силу следствия, C — измеримо, и $\mu_x\otimes\mu_y\otimes\mu_t(C)=\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\cdot d\mu_x\otimes\mu_y \Rightarrow$ для п. в. x C_x — измер.; $\mu_x\otimes\mu_y\otimes\mu_t(C) = \int\limits_X \mu_y\otimes\mu_t(C_x)\,d\mu_x$; пусть C_x — измеримо, в силу следствия $\mu_y\otimes\mu_t(C_x)=\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y$ существует для п. в. X, значит $\int f(x,y)\,d\mu_y$ инт. по X;

$\mu_x\otimes\mu_y\otimes\mu_t(C)=\int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y\,d\mu_x$.

2) $f(x,y)\geq 0$ и $\exists\int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y\,d\mu_x$. Введём функцию
$$f_n(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & f(x,y)\leq n\\ n, & f(x,y)>n.\end{cases}$$
Ясно, что $f_n< f_{n+1}$; они ограничены и измеримые. $\Rightarrow f_n(x,y)$ инт. по $\mu_x\otimes\mu_y$. Отсюда и из первой части $\int\limits_{X\times Y} f_n(x,y)\,d\mu_x\,d\mu_y=\int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y\,d\mu_x$

$\int\limits_X\int\limits_Y f_n(x,y)\,d\mu_x\,d\mu_y \leq \int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_x\,d\mu_y\ \forall n.$

Значит, $\int\limits_{X\times Y} f_n(x,y)\,d\mu_x\otimes\mu_y\leq\int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_y\,d\mu_x$; $f_n\leq f_{n+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т. Леви $\lim f_n = f$ — инт. по $X\otimes Y$. И равенство следует из п. пункта. Ч.Т.Д.

Пример 1. 1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}\quad x,y\in[-1,1]$

$\forall x\in[-1,1]\ \int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dy=0;\ \forall y\in[-1,1]\ \int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dx=0.$

(в силу нечётности) $\Rightarrow$ сущ. повторные интегралы так же равные нулю; но $f(x,y)$ не интегр., ибо

$$\iint\limits_{\square}|f(x,y)|\,dx \geqslant \int\limits_{\substack{0<r<1\\ \delta<\theta<\frac{\pi}{2}-\delta}} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{\delta}^{\pi/2-\delta}\frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{r^4}\,d\theta\,dr \geqslant \sin^2\delta\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\underbrace{\int\limits_0^1\frac{dr}{r}}_{+\infty}\ (?!)\Rightarrow f \text{ − не интегр.}$$

2) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $0<x<1$, $0<y<1$. Подсчитаем повт. интегралы; $f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-x}{(x^2+y^2)}\right)$, и $f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$. Тогда $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=$

$=-\int\limits_0^1\frac{dy}{1+y^2}=-\operatorname{arctg} y\Big|_0^1=-\frac{\pi}{4}$; $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy\,dx=$

$=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

Функция, однако, не интегрируема (проверяется аналогично).

ГЛАВА 4. Метрические пространства.

§1 Основные понятия

Опр M − метрическое пр-во, если $\forall x,y\in M\ \exists d(x,y)$ − расстояние т.ч.:
1) $d(x,y)\geqslant 0$, $=0 \Leftrightarrow x=y$
2) $d(x,y)=d(y,x)$
3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)\quad \forall x,y,z\in M$

Примеры. 1) $\mathbb{R}^1$; $d(x,y)=|x-y|$

2) $\mathbb{R}^n$; $d(x,y)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right]^{1/2}$

3) $\mathbb{C}$; $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$

4) $C(K)$, где $K\subset\mathbb{R}^n$, K — компакт. $d(f,g)=\max\limits_K|f-g|$

5) $L_p(D)$; $d(f,g)=\|f-g\|_{L_p(D)}$ $(p\geq 1)$

6) l_p; $x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ $d(x,y)=\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^p\right]^{1/p}$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$

__Лемма.__ Если $d(x,y)$ — метрика, то $\tilde{d}(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ — тоже метрика

__Д-во__ Очевидно, что неочевидно только нер. тр-ка; пусть $d_1=d(x,z)$; $d_2=d(z,y)$; $d(x,y)=d$. Надо д-ть, что $\dfrac{d}{1+d}\leq\dfrac{d_1}{1+d_1}+\dfrac{d_2}{1+d_2}$ (зная, что $d\leq d_1+d_2$). $\dfrac{d}{1+d}=1-\dfrac{1}{1+d}\leq 1-\dfrac{1}{d_1+d_2+1}=$

$$=\frac{d_1+d_2}{1+d_1+d_2}\leq\frac{d_1}{1+d_1}+\frac{d_2}{1+d_2}$$ Ч.Т.Д.

__Замечание__ $0\leq\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq 1$. Так-то!

__Опр.__ Открытым шаром с центром в т. $x\in M$ радиуса $R>0$ называется $B(x,r)=\{y\in M:\ d(x,y)<R\}$

__Пример.__ $\mathbb{N}=M$; $d(m,n)=|n-m|$. Тогда $B(n,\frac{1}{2})\subseteq B(n,\frac{1}{3})$

__Опр.__ $G\subset M$ наз-ся открытым, если $\forall x\in G\ \exists B(x,r): B(x,r)\subset G$.

__Опр.__ Точка $x\in M$ — предельная для мн-ва E, если $\{B(x,r)\setminus x\}\cap E\neq\varnothing$ $\forall r>0$.

Мн-во предельных точек E обозначим через E'; замыканием E называется $\overline{E}=E\cup E'$

__Опр__ Мн-во $F\subset M$ — замкнутое, если $\overline{F}=F$.

__Пример__ $M=[0,1]$, $d(x,y)=|x-y|$.; $M=\{$множества$\}$; $\rho(A,B)=\mu^*(A\triangle B)$

__Лемма__ Если G — открытое, то $M\setminus G$ — замкнутое; F — замкнутое, то $M\setminus F$ — открытое.

__Д-во.__ 1) Пусть $x\in(M\setminus G)'\equiv F'$, но $x\notin F\Rightarrow x\in G\Rightarrow\exists B(x,r)\subset G$; $B(x,r)\cap F=\varnothing$; $\{B(x,r)\setminus x\}\cap F=\varnothing$, x — не пред. (?!)

2) Если F замкнутое; пусть $M \setminus G$ – не открыто, $\exists x \in G$: $B(x,r) \not\subset G$ $\forall r>0$; $B(x,r) \setminus G \neq \varnothing$ $\forall r>0$; $\{B(x,r) \setminus x\} \cap F \neq \varnothing$ $\forall r \Rightarrow x$ – пред. точка $F \Rightarrow x \in F$ (?!) ЧТД

Теорема 1) Если G_α открыто, то $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ – открыто (α пробегает любые) $\bigcap\limits_{i=1}^{N} G_i$ – открыто

2) G_α – замкнуто, то $\bigcap\limits_\alpha G_\alpha$ – замкнуто; $\bigcup\limits_{i=1}^{N} G_\alpha$ ~~открыто~~ замкнуто

D-во 1) $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha = G$. $\forall x \in G$ $\exists G_\alpha : x \in G_\alpha \Rightarrow \exists B(x,r) \in G_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow B(x,r) \in G$; $G = \bigcap\limits_{i=1}^{N} G_i$; $\forall x \in G \Rightarrow x \in G_k$ $\forall k=1,\dots,N$, $B(x,r_k) \subset G_k$, $k=1\dots N$; берем $r = \min r_k \Rightarrow B(x,r) \in G$.

12.11.09. 2) Принцип двойственности: **ЛЕКЦИЯ #22**

$\bigcap\limits_\alpha F_\alpha = M \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha (M \setminus F_\alpha)\right)$, $M \setminus F_\alpha$ – открытое, $\bigcup\limits_\alpha (M \setminus F_\alpha)$ – откр. $\Rightarrow M \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha (M \setminus F_\alpha)\right)$ – замкнутое

$\bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k = M \setminus \left(\bigcap\limits_{i=1}^{N} (M \setminus F_i)\right)$ – и аналогично. ЧТД

§2 Принцип сжимающих отображений.

Опр $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M$ – наз-ся сход. к $x \in M$, если $d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Опр П-ть $\{x_n\}$ наз-ся фундаментальной, если $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$: $\forall n \geq N$ $d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon$ $\forall m=1,2$ ($\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$)

Опр Метрическое пр-во M называется полным, если любая фунд. послед-ть является сходящейся.

Пример $M=(0,1)$, $d(x,y)=|x-y|$ – не полное пр-во

Лемма Если $x_n \to x$, то $d(x_n, y) \to d(x,y)$

D-во. $d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x,y)$ $\Leftrightarrow$ ~~$d(x,y)$~~ $\Rightarrow d(x_n,y) - d(x,y) \leq d(x_n,x)$ И наоборот

$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \Rightarrow d(x,y) - d(x_n,y) \leq d(x_n,x)$

Ч.Т.Д.

Отображения.

Пусть X, Y - метр. пр-ва; $X \xrightarrow{f} Y$, $y = f(x)$

Опр. Отображение $f: X \to Y$ наз-ся непрерывным в т. $x \in X$, если $\forall \{x_n\}$, т.ч. $x_n \to x$, следует, что $\{f(x_n)\} \to f(x)$.

Опр. Отображение $f: M \to M$ наз-ся сжимающим, если $\exists \alpha \in (0,1)$, т.ч. $d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y)$. $\forall x, y \in M$.

Утв. Если $f(x): M \to M$ сжимающее, то $f(x)$ непрерывна в $\forall x \in M$.

Д-во. $\forall x_n \to x$ надо д-ть, что $f(x_n) \to f(x)$. $d(f(x_n), f(x)) \leq \leq \alpha\, d(x_n, x) \to 0$. Ч.Т.Д.

Теорема (ПСО). Пусть M - полное метрическое пространство. Тогда, если $f: M \to M$, f - сжимающее, то $\exists!\, x \in M: \ f(x) = x$.

Д-во. $\forall x_0 \in M$ положим $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$; оценим $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha\, d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$. Д-м, что x_n - фундаментальна, оценим

$d(x_n, x_m) = d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq$

$\leq [\alpha^{n+m-1} + \ldots + \alpha^n]\, d(x_1, x_0)$. Значит,

$d(x_n, x_m) \leq [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots]\, d(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$

Таким образом, x_n - фундаментальная. $\Rightarrow \exists x: x_n \to x$, $x \in M$ (ибо полное) $x_{n+1} = f(x_n)$, устремим n к ∞: $x = f(x)$. ~~Ч.Т.Д.~~ Д-м единственность: $\exists \tilde{x}: f(\tilde{x}) = \tilde{x}$, $d(x, \tilde{x}) > 0$; $d(x, \tilde{x}) = d(f(x), f(\tilde{x})) \leq \alpha\, d(x, \tilde{x}) \Rightarrow 1 \leq \alpha$ (?!) Ч.Т.Д.

Замечание. Последовательные приближения, $x_n = f(x_{n-1})$, сходятся вне зависимости от x_0, а погрешность приближения оценивается: $d(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$ (ибо $d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$)

$\forall n, m$, и устремим m к бесконечности.)

Теорема. Пусть M - полное метрическое пр-во; пусть $\exists m$, т.ч. f^m - сжимающее. Тогда $\exists!\ x \in M$: $f(x)=x$.

Д-во. $\exists!\ x \in M$: $f^m(x)=x$. (из пред. теоремы). Р-м расстояние $d(f(x), x) = d(f(f^m(x)), f^m(x)) = d(f^m(f(x)), f^m(x))$

$\leq \alpha\, d(f(x), x) \Rightarrow d(f(x), x) = 0$. Д-м единственность: $f(x)=x$, $f(\tilde{x})=\tilde{x}$; $f^m(x)=x$, $f^m(\tilde{x})=\tilde{x} \Rightarrow x=\tilde{x}$. Ч.Т.Д.

Теорема. Пусть M - полное метр. пр-во; пусть f задано на замкнутом шаре $\overline{B(x_0, r)} = \{y: d(x_0, y) \leq r\}$, т.е. $f: \overline{B(x_0, r)} \to M$, и f - сжимающее на $\overline{B(x_0, r)}$; $d(f(x_0), x_0) \leq (1-\alpha) r$. Тогда в шаре $\overline{B}(x_0, r)$ $\exists!$ $f(x)=x$.

Д-во. Покажем, что на самом деле $f: \overline{B} \to \overline{B(x_0, r)}$. Рассмотрим $d(f(x), x_0) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \leq \alpha d(x, x_0) + (1-\alpha) r \leq$ $\leq \alpha r + (1-\alpha) r = r$. В качестве $\tilde{M} = \overline{B(x_0, r)}$ - полное метрическое пространство, f - сжим. $\Rightarrow \exists!\ x \in \tilde{M}$, $f(x) = x$. Ч.Т.Д.

Пример. $M = [r, +\infty)$; $d(x,y) = |x-y|$; $f(x) = x + \frac{1}{x}: M \to M$, M - полное, но неподв. точки нет; $|f(x_1) - f(x_2)| =$ $= |f'(\xi)||x_1 - x_2| = \left|1 - \frac{1}{\xi^2}\right| |x_2 - x_1| < |x_2 - x_1|$ - почти сжимающее, однако:)

Теорема. Пусть M - полное метрическое и компактное пр-во, $f: M \to M$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ $\forall (x,y) \in M$, $x \neq y$. Тогда $\exists!$ неподвижная точка в M.

Опр. Метр. пр-во наз-ся компактным, если из любой $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить сход. подпоследовательность, $x_{n_k} \to x$, $x \in M$.

Д-во Рассмотрим $d(f(x), x)$, $x \in M$. Посчитаем $\inf\limits_x f(f(x), x) =$ $= d_0 \geq 0$.

1) Пусть $d_0 = 0 \Rightarrow \exists\, x_n \in M,\ d(f(x_n), x_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x \in M;$

$d(f(x_{n_k}), x_{n_k}) \xrightarrow[n_k \to \infty]{} 0 \Rightarrow d(f(x), x) = 0 \Rightarrow x$ – неподв.

2) Пусть $d_0 > 0;\ \exists\, x_n:\ d(f(x_n), x_n) \longrightarrow d_0;\ \exists\, x_{n_k} \longrightarrow \tilde{x},$

$d(f(\tilde{x}), \tilde{x}) = d_0 > 0.\ d_0 \leq d(f(f(\tilde{x})), f(\tilde{x})) < d(f(\tilde{x}), \tilde{x}) = d_0$

$(?!) \Rightarrow d_0 = 0$

Д-м единственность. $\exists\, x = f(x),\ \tilde{x} = f(\tilde{x});\ d(x, \tilde{x}) = d(f(x), f(\tilde{x})) < d(x, \tilde{x})$ (?!) Ч.Т.D.

<u>Пример.</u> 1) $M = C[a, b];\ d(f, g) = \max\limits_{x \in M} |f(x) - g(x)|$. Р-м уравнение:

$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t, \alpha) x(\alpha)\, d\alpha + y(\alpha);\ x, y \in M,\ K \in C(M \times M),$

$\lambda \in \mathbb{R}$ (быть может, $\lambda \in \mathbb{C}$). Положим $F(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t, \alpha) x(\alpha)\, d\alpha + y(x);\ F(t)$ – непрерывная, $f: M \to M;\ d\,f(x_2) - f(x_1)|$

$\leq |\lambda| \int\limits_a^b |K(t, \alpha)| \cdot \max\limits_M |x_1 - x_2|\, d\alpha \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq$

$\leq |\lambda| K_0 \cdot d(x_1, x_2)(b - a)$ – сжимающее, если $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0(b-a)}$.

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#23}}$ 17.11.09

2) $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t, \alpha, x(\alpha))\, d\alpha + y(t);\ x(t) \in C[a, b],$

$y(t) \in C[a, b],\ K \in C[[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}]$; потребуем липшицевости: $|K(t, \alpha, z_2) - K(t, \alpha, z_1)| \leq K_0 |z_2 - z_1|$

$\forall z_2, z_1 \in \mathbb{R},\ \forall t, \alpha \in [a, b]$

Введём отображение $f(x) = \lambda \int\limits_a^b K(t, \alpha, x(\alpha))\, d\alpha + y(t)$

легко видеть, что $f: C[a, b] \to C[a, b] \equiv M$.

$|f(x_2) - f(x_1)| = |\lambda \int\limits_a^b [K(t, \alpha, x_2(\alpha)) - K(t, \alpha, x_1(\alpha))]\, d\alpha|$

$\leq |\lambda| K_0 (b - a) \max\limits_{[a,b]} |x_2(\alpha) - x_1(\alpha)| = |\lambda| K_0 (b-a) d(x_1, x_2),$

т.е. $d(f(x_2), f(x_1)) \leq |\lambda| K_0 (b - a) d(x_2, x_1)$. Оно сжимающее, если $|\lambda| K_0 (b - a) < 1$ – т.е. $\exists!$ решение интегрального уравнения.

D-

__Замечание.__ $|K(t,\alpha,x_2)-K(t,\alpha,x_1)| \leq K_0 |x_2-x_1| \ \forall x_2, x_1$, т.ч. $|x_1|<H$, $|x_2| \leq H$, $H=const$ (т.е. требование липшицевости можно ослабить)

3) Интегральное уравнение Вольтерра:

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t,\alpha)x(\alpha)d\alpha + y(t); \quad M = C[a,b]$$

Потребуем, что бы $K(t,\alpha) \in C([a,b]\times[a,b]) \Rightarrow |K(t,\alpha)| \leq K_0 \ \forall t,\alpha.$

$f: M \to M$ (очевидно); $|f(x_2)-f(x_1)| \circledequal$

(где $f(x) = \lambda \int_a^t K(t,\alpha)x(\alpha)d\alpha + y(t)$)

$$\circledequal |\lambda| \left|\int_a^t K(t,\alpha)(x_2(\alpha)-x_1(\alpha))\right| d\alpha \leq |\lambda| K_0 (t-a) \cdot$$

$$\cdot \max_{[a,b]}[x_2(\alpha)-x_1(\alpha)] = |\lambda| K_0 (t-a)\, d(x_2,x_1);$$

$$|f^2(x_2)-f^2(x_1)| = \left|\lambda \int_a^t K(t,\alpha)(f(x_2)-f(x_1))\, d\alpha\right| \leq$$

$$\leq |\lambda| K_0 \int_a^t |(f(x_2)-f(x_1))| d\alpha \leq |\lambda|^2 K_0^2 \frac{(t-a)^2}{2} d(x_2,x_1)$$

Повторяем: $|f^m(x_2)-f^m(x_1)| \leq \frac{(K_0|\lambda|)^m}{m!}(t-a)^m d(x_2,x_1)$

т.е. $d(f^m(x_2), f^m(x_1)) \leq \frac{(K_0|\lambda|)^m}{m!}(b-a)^m d(x_2,x_1)$

А правая часть при достаточно большом m $<1 \Rightarrow$ отображение стягивающее. $\Rightarrow \exists!\, x(t) \in C[a,b]$ — решение ур. Вольтерра (для $\forall \lambda \in \mathbb{C}$)

§3 Теорема Хаусдорфа о пополнении метрического пространства

__Опр.__ Два метрических пространства называются изометричными, если между ними есть вз.-однозн. соответствие, сохраняющее расстояние.

__Теорема.__ Пусть M — метр. пр-во, тогда $\exists!$ (с точн. до изометрии) полное метрическое пр-во $\tilde{M}$, т.ч.:

1) $M \sim M_0$, $M_0 \subseteq \widetilde{M}$ ($\sim$-изометрия)

2) Замыкание M_0 даёт $\widetilde{M}$: $\overline{M_0} = \widetilde{M}$

D-во. I Р-м фунд. п-ти $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M$; будем говорить, что фунд. п-ти $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентны, если $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Положим для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ через X — класс экв. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фунд. п-тей. $X \in \widetilde{M}$. $d(X, Y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ ($\{x_n\} \in X$, $\{y_n\} \in Y$ произвольные) П-м, что предел существует и не зависит от выбора $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

1) Существование. $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$; $d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$; правая часть стремится к 0 в силу фундаментальности. Меняя m и n местами, получаем, что ~~d~~ $d(x_n, y_n)$ фундаментальна. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

2) Независимость. Пусть $\{x_n'\} \in X$, $\{y_n'\} \in Y$. $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_n') + d(x_n', y_n') + d(y_n', y_n)$; $d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n') \leq d(x_n, x_n') + d(y_n', y_n)$. Поменяв местами штрих. и не штрих, то $|d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n')| \leq d(x_n, x_n') + d(y_n', y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ не зависит :)

Проверим же теперь аксиомы метрики: $d(X, Y) \geq 0$ (очевидно); $d(X, Y) = 0 \Rightarrow X = Y$ (послед. экв-ны); $d(X, Y) = d(Y, X)$; $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Y, Z)$ (очевидно)

II. Построим M_0. $M_0 = \{Y : \{y, y, y, \ldots\} \in Y\}$. Поставим соответствие $y \longleftrightarrow Y$. Покажем, что $\overline{M_0} = \widetilde{M}$, т. е. что $\forall X \in \widetilde{M}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists Y \in M_0 : d(X, Y) < \varepsilon$. В X есть $\{x_1\}_{n=1}^{\infty}$; $Y_n \ni \{x_n \ldots x_n \ldots\}$. Покажем, что Y_n приближается к X сколь угодно точно: $d(X, Y_n) = \lim\limits_{m\to\infty} d(x_m, y_n) < \varepsilon$ при $n \geq$ некого N. (ибо $d(x_n, x_m) \xrightarrow[m\to\infty,\ n\to\infty]{} 0$) $\Rightarrow \overline{M_0} = \widetilde{M}$.

III. Покажем, что $\tilde{M}$ полно. Р-м фундаментальную последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Из предыдущего, $\exists Y_n \in M_0$ $d(X_n, Y_n) \le \frac{1}{n}$. В Y_n есть п-ть $\{x_1 \dots x_n\}$.

Положим $X \ni \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ (кандидат на роль предела). Д-м, что $\{x_1 \dots x_n\}$ фундаментальна. $d(x_n, x_m) = d(Y_n, Y_m) \le d(Y_n, X_n) + d(X_n, X_m) + d(X_m, Y_m) \le$
$\le \frac{1}{n} + d(X_n, X_m) + \frac{1}{m} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Итак, класс X существует, д-м, что он предел. $d(X, X_n) = \lim\limits_{m\to\infty} d(x_m, x_n)$
$< \varepsilon$ при дост. большом $m > N$.

IV. Д-м единственность. Пусть $M \sim M_0 \subset \tilde{M}$, $M \sim M_0' \subset \tilde{M}'$
Но тогда $M_0 \sim M_0'$, но $\overline{M_0} = \tilde{M}$, $\overline{M_0'} = \tilde{M}' \Rightarrow$
$\tilde{M} \sim \tilde{M}'$. Ч.Т.Д.

§4 Теорема Бэра о категориях.

Опр. $E \subset M$ наз-ся плотным, если $\overline{E} = M$. (П/р: $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$), и нигде не плотным, если оно замкнуто, и оно не содержит ни одного шара целиком. (П/р: $M = \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$ — нигде не плотно, $\mathbb{Z}$ — нигде не плотно)

Опр. $E \subset M$ наз-ся нигде не плотным в M, если $\overline{E}$ не содержит ни одного шара.

Опр. Мн-во $F \subset M$ наз-ся мн-вом первой категории, если E можно представить как $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k — нигде не плотное мн-во.
Все остальные мн-ва — мн-ва второй категории.

Теорема (Бэр) Полное метрическое пространство есть множество второй категории.

ЛЕКЦИЯ #24

9.11.09

Лемма. Замкнутое мн-во F нигде не плотно в $M \Leftrightarrow \overline{M \setminus F} = M$

Док-во $\Rightarrow$ Пусть F — нигде не плотно. Пусть $G = M \setminus F$, $\overline{G} \ne M \Rightarrow$
$\exists x \in M$, $x \notin \overline{G} \Rightarrow x \notin G \Rightarrow x \in F$; т.к. F не содержит ни

одного шара, то $B(x,r) \cap G \neq \varnothing \ \forall r>0$, $\Rightarrow x$ - предельная точка $G \Rightarrow x \in \overline{G}$ (?!)

($\Leftarrow$) Пусть $\overline{G} = M$. От противного: пусть $\exists B(x,r) \subset F$. $\Rightarrow$ $B(x,r) \cap G = \varnothing \Rightarrow x \notin \overline{G}$ (?!) Ч.Т.Д.

Теорема (о влож. шарах) Пусть M-полное метр. пр-во; $\overline{B(x_1, r_1)} \supset \overline{B(x_2, r_2)} \supset \dots$, $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда $\bigcap\limits_{n=1} \overline{B(x_n, r_n)} \neq \varnothing$.

Д-во $d(x_n, x_{n+m}) \leq r_n \ \forall m \geq 1$; т.к. $r_n \to 0$, то $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальная; т.к. M-полное, то $\exists x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. $d(x_n, x_{n+m}) \leq r_n$; $m \to \infty$: $d(x_n, x) \leq r_n \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} \ni x$. Ч.Т.Д.

Пример. А пусть $r_n \not\to 0$. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$; $d(m,n) = \begin{cases} 0, m = n \\ 1 + \frac{1}{\min(m,n)}, m \neq n \end{cases}$

$\forall$ фундаментальная есть финитно-постоянная $\Rightarrow$ M полно

Пусть $\overline{B(n, 1+\frac{1}{n})} = \{ d(n,m) \leq 1 + \frac{1}{n} \} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\min(n,m)} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow$ $\Rightarrow \min(n,m) \geq n$. $\overline{B(n, 1+\frac{1}{n})} = M \setminus \{1, 2, \dots, n-1\}$. Они, очевидно, вложены, пересечение пусто.

Лемма Пусть M-полное метрическое; G_n, $n = 1, 2, \dots$ - откр; $\overline{G_n} = M$. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$.

Д-во. Пусть: G_1-открытое $\Rightarrow \exists B(x_1, \tilde{r}_1) \subset G_1$, $\tilde{r}_1 \leq \frac{1}{1} \Rightarrow$ $\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_1, \tilde{r}_1)$, если $r_1 < \tilde{r}_1$, $\overline{B(x_1, r_1)} \subset G_1$, $r_1 < 1$

$B(x_1, r_1) \cap G_2 \neq \varnothing$ (иначе G_2 не плотно в M) $\Rightarrow \exists$ т. x_2, $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap G_2$; т.к. G_2-открытое, то $\exists B(x_2, \tilde{r}_2) \subset G_2$, $\tilde{r}_2 \leq \frac{1}{2}$. $\Rightarrow \overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_2, \tilde{r}_2)$, если $r_2 < \tilde{r}_2$; $B(x_2, \tilde{r}_2) \subset$ $\subset G_2 \cap B(x_1, r_1)$; $\overline{B(x_2, r_2)} \subset \overline{B(x_1, r_1)}$ и т.д.; $G_3 \cap B(x_2, r_2)$ и т.д. По теореме, $\bigcap\limits_{n=1} \overline{B(x_n, r_n)} \neq \varnothing$, $\overline{B(x_1, r_1)} \subset G_1$, $\overline{B(x_2, r_2)} \subset$ $\subset G_2 \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$ Ч.Т.Д.

Док-во. От противного: пусть $M=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k — нигде не плотно.
т. Бэра

$$M=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k;\ \varnothing = M\setminus M = M\setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}(M\setminus E_k) \neq 0$$ по лемме. (?!) Ч.Т.Д.

Пример Из т. Бэра вытекает, что $\exists f\in C[a,b]$, которая не является дифф-ой ни в одной точке.

§5 Компактность в метрических пространствах.

Опр. M — компактно, если из любой $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\in M$, можно выбрать сход-ся подпоследов-ть $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x\in M$.

Лемма. Если M компактно, то M полно.

Д-во $]\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фунд-на; $\exists$ п.п. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $x_{n_k}\to x\in M \Rightarrow x_n \to x\in M$. Ч.Т.Д.

Опр. M — предкомпактно, если из любой $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность фундаментальную.

- Если M предкомпактно и полно, то оно компактно.

Опр. Метр. пр-во M ограниченно, если $\sup\limits_{x,y\in M} d(x,y)<\infty$

Лемма. Если M — предкомпакт, то оно ограничено

Д-во От противного: $\sup\limits_{x,y\in M} d(x,y)=+\infty \Rightarrow x_n, y_n\in M$, $d(x_n,y_n)\to+\infty$

Пусть x_{n_k} — фундаментальная, $y_{n_{k_\ell}}$ — фундаментальная $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n_k\to\infty} d(x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}})<\infty$ (?!) Ч.Т.Д.

Пример Из ограниченности предком-ть не следует.

Р-м ℓ_1: $e_1=(1,0,0\ldots)$, ..., $e_n=(0,0\ldots,\underset{n}{1},0\ldots)$

$\|e_n\|=1$, $\|e_n-e_m\|=2$, $n\neq m$. (т.е. рассмотрим такое подмножество)

Опр. M — вполне ограничено, если $\forall\varepsilon>0\ \exists x_1,\ldots,x_n\in M$, и $M\in \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\varepsilon)$ (существует конечная эпсилон-сеть)

У-в. Из вполне ограниченности следует ограниченность.

Д-во $d(x,y) \leq d(x,x_m) + d(x_m,x_k) + d(x_k,y) < 2\varepsilon + d(x_m,x_k)$. Ч.Т.D.

Теорема M предкомпактно $\Leftrightarrow$ M вполне ограничено. (Хаусдорфа)

Д-во. ($\Leftarrow$) M - вполне огр., д-ем, что M - предкомп. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ и накроем шарами $B(x_{11},\varepsilon)$, $B(x_{12},\varepsilon), \dots, B(x_{1n},\varepsilon)$. Найдётся шар, содержащий ∞ членов послед-ти. $x_{m_1} \in B(x_{1k},\varepsilon_1)$. Р-м п.п. $x_{n_{m_1}}$ $x_{n_{m_1}} \in B(x_{1k},\varepsilon_1)$. Положим $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$, накроем шар $B(x_{1k},\varepsilon_1)$ конечным числом шаров. Один из них содержит ∞ членов подп-ти. И т.д.; $d(x_{m_n},x_{m_l}) \leq 2(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \dots + \varepsilon_l \leq 2(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \dots) = \frac{1}{2^{n-2}} < \varepsilon$, $\forall l \geq n$.

ЛЕКЦИЯ #25

03.12.09

Следствие. M - предкомп, если существ предкомп. ε-сеть для $\forall\varepsilon$.

Д-во $\exists B(x_k,\varepsilon)$, $k=1,n$: $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\varepsilon) \overset{?}{\Rightarrow} M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,2\varepsilon)$.

Да, это так! Ч.Т.D.

Теорема (Гейне-Бореля) M - компакт $\Leftrightarrow$ Если $M \subset \bigcup_{\alpha} G_\alpha$, G_α - откр, то $\exists G_{\alpha_k}$, т.ч. $M \subset \bigcup_{k=1}^{m} G_{\alpha_k}$.

Д-во. ($\Leftarrow$) Пусть $M \subset \bigcup_{k=1}^{m} G_{\alpha_k}$; $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

$\overline{X_n}$ - замыкание.

1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \neq \emptyset$. Предположим противное, $=\emptyset$.

$M = M \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{\text{откр}}{(M \setminus \overline{X_n})} \Rightarrow M = \bigcup_{n=1}^{N} (M \setminus \overline{X_n}) =$

$= M \setminus \bigcap_{n=1}^{N} \overline{X_n} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{N} \overline{X_n} = \emptyset = (?!)$ т.к. $x_N \in X_n$, $n=\overline{1,N}$

2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n}$

2.1) x входит беск. число раз $\Rightarrow$ всё

2-2) x входит конечное число раз $\Rightarrow \exists$ сх. подпосл.

$\Rightarrow$ От противного. $\exists G_\alpha$, нельзя выбрать конечное подпокрытие. M-предкомп. $\Rightarrow \exists$ конечная ε-сеть.

$\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_1} B(x_i, \varepsilon_1) \Rightarrow \exists (x_{i_1}, \varepsilon_1)$ - нельзя покрыть кон. числом. И т.д. Получим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Можно выделить фунд. п-ть, сх-ся к x. $\exists G_\beta \ni x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N: \forall n \geq N$ $x_n \in G_\beta \Rightarrow$ шар $B(x_N, \varepsilon_N)$ можно покрыть G_β. (?!) Ч.Т.Д.

§6 Критерий предкомпактности в $C(K), L_p(K), \ell_p$.

K-компактное мн-во.

1) $C(K)$-мн-во всех непр-ых на $K \subseteq \mathbb{R}^n$; $d(f,g) = \max\limits_{x \in K} |f(x) - g(x)|$

Сходимость - равномер. сходимость.

Теорема (Арцела-Асколи) $E \subset C(K)$ предкомп. $\Leftrightarrow$ E равн. огр. и равностеп. непр.

Д-во. Р. огр.: $|f(x)| \leq M$, $\forall x \forall f$; р. непр.: $\forall \varepsilon \exists \delta: |x' - x''| < \delta \Rightarrow$

$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ См. 2й курс.

$\Rightarrow$ Предкомп $\Rightarrow \exists$ кон. ε-сеть $\forall \varepsilon > 0$. $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(f_k, \varepsilon)$

$f_k(x)$ непр. на $K \Rightarrow f_k$ равн. непр. на $K \Rightarrow$

$f(x)$ равностеп. непр. на K. Ч.Т.Д.

Теорема (Рисса) Мн-во $E \subset L_p(K)$ предкомпактно в L_p

$\Leftrightarrow$ огр. в L_p и р. непр. в L_p, т.е. $\exists M > 0$,

т.ч. $\|f\|_{L_p} < M$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0: |h| < \delta, \Rightarrow$

$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p} < \varepsilon$ $\forall f \in E$ ($f = 0$ вне K)

ЛЕКЦИЯ #26

$\Rightarrow$ Аналогично т. Арцела–Асколи.

$\Leftarrow$ Пусть $\|f\|_{L_p} < M \ \forall f \in E$, и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: как только $|\omega| < \delta$, то $\|f(\cdot + \omega) - f\| < \varepsilon \ \forall f \in E$, $f \equiv 0$ вне E.

Введём $\omega(r) = \begin{cases} C(1-r), & 0<r<1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$, где C таково, что $1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\,dx = \{\text{сф. к-ты}\} = C|S_n| \int\limits_0^1 (1-r) r^{n-1} dr =$

$= C\cdot|S_n|\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow C = \frac{n(n+1)}{|S_n|}$. Введём $\omega_\rho(|x|) = \frac{1}{\rho}\omega\left(\frac{|x|}{\rho}\right)$ (легко видеть, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(|x|)\,dx = 0$), $\omega_\rho(|x|) = 0$ при $|x| > \rho$.

Для любой f ставим в соответствие $f_\rho(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\omega_\rho \cdot (|x-y|)\,dy$ (усреднение f). Покажем, что это – ε-сеть предкомпактная, $f \in E$. Проверим уклонение:

$f_\rho(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\omega_\rho(|x-y|)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\omega_\rho(|x-y|)\,dy =$

$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(y) - f(x))\omega_\rho(|x-y|)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} [f(x+z) - f(x)]\,\omega_\rho(|z|)\,dz$

$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_\rho(x) - f(x)|^p\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} [f(x+z) - f(x)]\,\underbrace{\omega_\rho}_{\omega_\rho^{1/p}\omega_\rho^{1/q}}(|z|)\,dz\right|^p dx$

$\leq \left\{\begin{matrix}\text{нер-во} \\ \text{Гёльдера}\end{matrix}\right\} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|^p\,\omega_\rho(|z|)\,dz \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(|z|)\,dz\right)^{p/q} dx =$

$\overset{\text{т. Фубини}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|^p dx \cdot \omega_\rho(|z|)\,dz$. $\forall \varepsilon > 0$

при $\rho < \delta$ $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|^p dx < \varepsilon^p \ \forall f \in E$. Итого,

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_\rho(x) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(|z|)\,dz = \varepsilon^p \ \forall f \in E$,

т.е. $\|f - f_\rho\|_{L_p} < \varepsilon$. Это действительно ε-сеть!

Д-м предкомпактность $\{f_\rho(x)\}$. Фиксируем ρ; покажем, что $f_\rho(x)$ — р. огр. и р. непр. Равномерная ограниченность: $|f_\rho(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\omega_\rho(|x-y|)\,dy\right| =$

$= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+z)\omega_\rho(|z|)\,dz\right| \le$ {нер-во Гёльдера} $\le$

$\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+z)|^p\, dz\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\omega_\rho(z)|^q\, dz\right)^{1/q} =$

$= C(\rho)\,\|f\|_{L_p} \le M\cdot C(\rho)\quad \forall f\in E$. Равностепенная непр-ть: $|f_\rho(x+\Delta) - f(x)| = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(f(x+\Delta+z) -$

$- f(x+z)\big)^p\,\omega_\rho(|z|)\,dz \le$ {нер-во Гёльдера} $\le$

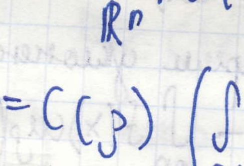
$\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+z+\Delta) - f(x+z)|^p\, dz\right)^{1/p} \overbrace{\left(\int\limits_{\mathbb{R}_n} |\omega_\rho(|z|)|^q\, dz\right)^{1/q}}^{C(\rho)} =$

$= C(\rho)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y+\Delta) - f(y)|^p\, dy\right)^{1/p} < \varepsilon$ в силу равностеп. непр-ти.

$\Rightarrow \{f_\rho(x)\}$ предкомп. в $C(K)$. Но если $f_n \rightrightarrows f$, то $\|f_n - f_n\|_{L_p} \longrightarrow 0 \Rightarrow \{f_\rho(x)\}$ предк. в $L_p \Rightarrow E$ — предкомп. в L_p. Ч.Т.Д.

Замечание. Если $K = \mathbb{R}^n$, надо доб-ть условие: $\forall \varepsilon > 0\ \exists R: \int\limits_{|x|>R} |f(x)|^p dx < \varepsilon$

Пример.



— Крит. Арцела не действует

Теорема. $E \subset l_p$ предкомпактно $\iff$ 1) $\exists M>0: \|x\|_{l_p} \le M\quad \forall x\in E$

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \|R_N(x)\|_{l_p} < \varepsilon\quad \forall x \in E$

(где $R_N(x) = (\underset{N}{0, \dots, 0}, x_{N+1}, \dots)$)

D-во. 1) Необходимость. E - предкомпактно $\Rightarrow \exists M: \|x\|_{\ell_p} < M$ $\forall x \in E$ (ибо предкомп $\Rightarrow$ равн. ограниченность) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечная ε-сеть: $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(y^k, \varepsilon)$ $\|y^k\|_{\ell_p} < \infty$ $\Rightarrow \exists N: \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |y^k_n|^p < \varepsilon_1$ $\forall k = 1, \ldots, n$. Т.к. их конечное число, то N можно выбрать на всех: $\|R_N y^k\|_{\ell_p} < \varepsilon$.

$\forall x \in E: \exists B(y^k, \varepsilon) \ni x \Rightarrow \|x - y^k\|_{\ell_p} < \varepsilon \Rightarrow$ $\|R_N(x) - R_N y^k\| < \varepsilon_1$; $\|R_N(x)\| - \|R_N y^k\| \le \|R_N(x) - R_N y^k\| \Rightarrow \|R_N x\| < 2\varepsilon$ $\forall x \in E$.

2) Достаточность. $\{P_N x\}$ начало x; это ε-сеть, ибо $\|x - P_N x\| = \|R_N(x)\| < \varepsilon$ $\forall x \in E$. По существу, это конечно-мерное пр-во; $\|P_N x\|_{\ell_p} \le \|x\|_{\ell_p} \le M$ $\forall x \in E$. $P_N x$ - предкомпактное $\Rightarrow$ E - предкомпактно. Ч.Т.D.

ГЛАВА 5. Банаховые пространства.

§1 Основные понятия.

X - линейное нормированное пр-во.

Опр. Полное линейное норм. пр-во наз-ся банаховым пр-во.

Пусть задан $A: X \to Y$, $Ax = y$.

Опр $A: X \to Y$ непр. в т. x, если $\forall x_n \to x$ $Ax_n \to Ax$.

Лемма Если A - линейный, $A: X \to Y$, A непр. в т. $z \in X$, то A непр в $\forall x \in X$.

D-во. $\forall x \in X$, $\forall x_n \to x$: $z + x_n - x \to z$, $A(z + x_n - x) \to Az$ $Az + Ax_n - Ax \to Az \Rightarrow Ax_n \to Ax$. Ч.Т.D.

Пример Р-м $C^1[0,1]$, $A = \frac{d}{dt}$, $\frac{\sin nt}{\sqrt{n}} \to 0$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin nt}{\sqrt{n}}\right) \not\to 0$.

Опр. A - ограниченный, если он любое ограниченное мн-во переводит в ограниченное.

Опр A-огран., $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$

Лемма. Если A-огр, то $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Д-во. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \le \sup\limits_{\substack{\|x\|\le 1 \\ x\ne 0}} \|Ax\| \cdot \frac{1}{\|x\|} = \sup\limits_{x\ne 0} \left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| =$

$= \sup\limits_{\|z\|=1} \|Az\| \le \sup\limits_{\|z\|\le 1} \|Az\| = \|A\|$. Ч.Т.Д.

Следствие. Если A-огр, то $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$

Опр $\mathcal{L}(X,Y)$ – пр-во линейных огр. операторов из X в Y.

(По определению, $(A+B)x = Ax + Bx$)

Оказывается, $\mathcal{L}(X,Y)$ – линейное огр. пр-во.

08.12.09

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#27}}$

Теорема. Лин. опер. $A: X \to Y$ непрерывен $\Leftrightarrow$ ограниченность.

Д-во. $(\Leftarrow)$ A-ограничен; д-м непр-ть. Пусть $x \in X$, $x_n \to x$, надо д-ть, что $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \le \|A\| \cdot \|x_n - x\| \to 0$.

$(\Rightarrow)$ A-непрерывен; д-м огран-ть. От противного: пусть он не ограничен, т.е. $\sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = +\infty \Rightarrow \exists x_n, \|x_n\| \le 1$,

$\|Ax_n\| \to +\infty$. Введём $z_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|Ax_n\|}}$, тогда $z_n \to 0$.

$\|Az_n\| = \frac{1}{\sqrt{\|Ax_n\|}} \|Ax_n\| = \sqrt{\|Ax_n\|} \to \infty$ (?!) Ч.Т.Д.

Теорема. Если Y-банахово, то пр-во $\underset{\text{лин. нормир.}}{\mathcal{L}(X,Y)}$ – полное пр-во

Д-во. Пусть $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, A_n- фундаментальна: $\|A_n - A_m\| \to 0$.

$\forall x \in X$, $A_n x$ фундаментальна: $\|A_n x - A_m x\| \le$

$\le \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \to 0$. Т.к. Y-полное, то $\exists y \in Y$:

$A_n x \to y$. Определим оператор A как $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$.
Очевидно, что он линеен. $\forall \varepsilon>0\ \exists N$, т.ч. $\forall n \geq N$ $\|A_n - A_{n+m}\| < \varepsilon\ \forall m$.

$\|A_n x - A_{n+m} x\| \leq \|A_n - A_{n+m}\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon\|x\|$; $\forall x, \forall n \geq N$. устремим $m \to \infty$:

$\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$. $\forall x \Rightarrow \|A_n - A\| \leq \varepsilon\ \forall n \geq N$

$\Rightarrow A$ огр, и $A_n \to A$. Ч.Т.D.

Теорема (Банах, Штейнгауз) Пусть X, Y - линейные норм. пр-ва; $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $n = 1, 2, 3, \dots$; пусть $E = \{x \in X : \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x\| < \infty\}$ - множество второй категории. Тогда $\exists M > 0$, т.ч. $\|A_n\| \leq M\ \forall n \geq 1$.

D-во. Введём $R_{nm} = \{x \in X : \|A_n x\| \leq m\}$; $n, m \in \mathbb{N}$. Отметим, что R_{nm} - замкнуты ($\|A_n x_k\| \leq m$, $k \to \infty$, в силу непр-ти $\|A_n x\| \leq m$.); Введём $R_m = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_{nm}$; (оно тоже замкнутое)
Введем (точнее, д-м, что) $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} R_m$. D-м это.

1) $x \in E \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x\| < \infty \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|A_n x\| \leq m\ \forall n \geq 1$.

$\Rightarrow x \in R_{nm}\ \forall n \geq 1 \Rightarrow x \in R_m \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} R_m$.

2) $x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} R_m \Rightarrow \exists R_m \ni x \Rightarrow x \in R_{nm}\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \|A_n x\| \leq m\ \forall n$.

$\Rightarrow \overline{\lim} \|A_n x\| \leq m < \infty \Rightarrow x \in E$. Отметим, что R_m замкнуты; т.к. E - второй категории, то $\exists R_m$ - не является нигде не плотным, в нём есть шарик:
$\exists B_r(x_0) \subset R_m$. $\forall \underset{\neq 0}{x} \in X$. Р-м $z = x_0 + \frac{r x}{2\|x\|} \in B_r(x_0) \subset$
$\subset R_m$ Если $z \in R_m = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_{nm} \Rightarrow \|A_n z\| \leq m\ \forall n \geq 1$

$m \geq \|A_n z\| \cancel{\leq \|A_n x_0\| + \frac{r}{2}\frac{\|A_n x\|}{\|x\|}} \geq \|A_n x\| \cdot \frac{r}{2\|x\|} - \|A_n x\| \geq$

$\geq \frac{\|A_n x\| r}{2\|x\|} - m$; $\frac{4m}{r} \geq \frac{\|A_n x\|}{\|x\|}\ \forall x \in X \Rightarrow \|A_n\| \leq M$

$\forall n \geq 1$. Ч.Т.D.

Следствие. X - банахово, $\overline{\lim}\, \|A_n x\| < \infty$ $\forall x \in X$, то $\exists M: \|A_n\| \leq M$

лин. огр. опер. из $\mathcal{L}(X, X)$

Д-во $E = X$ - полное лин. нормир. $\Rightarrow$ полное метр. пр-во $\Rightarrow$ по т. Бэра Ч.Т.Д.

Пример применения ТБШ. Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, составим ТРФ: $S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt$.

$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2} dt$; положим

$x = 0$: $S_n(0, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2} dt$. На самом деле, S_n - это те линейные огр операторы над $C[-\pi, \pi]$, $\|f\| = \max\limits_{[-\pi, \pi]} |f(x)|$; $A_n f \in \mathbb{R}$, $A_n: X \to \mathbb{R}$. Отметим, что $|\sin(n+\frac{1}{2})t| \leq t(n+\frac{1}{2})$;

$|\sin \frac{t}{2}| \geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{t}{2}\right)$. $\|A_n f\| = \left|\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2} dt\right| \leq$

$\leq \frac{(n+\frac{1}{2})}{\frac{2}{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt \leq \max\limits_{[-\pi, \pi]} |f| \cdot 2\pi = \|f\|$.

$\exists f: \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n f\| = +\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |S_n(0, f)| = +\infty$.

(ибо нормы растут). Для этого д-м, что $\|A_n\| \to +\infty$

Итак мы покажем, что $\|A_n\| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2}\right| dt$.

Посчитаем:

$\|A_n\| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{2\sin t/2} dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt \geq$

$\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})t}{t} dt = \left\{ (n+\frac{1}{2})t = z \right\} =$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{\sin^2 z}{z} dz \geq \frac{2}{\pi} \int_1^{\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{\sin^2 z}{z} dz = \frac{1}{\pi} \int_1^{\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{1-\cos 2z}{z} dz =$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\ln\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_1^{\pi(n+\frac{1}{2})}\frac{\cos 2z}{z}\,dz}_{\to \text{const}}$$

Осталось д-ть, что $\|A_n\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2}\right|dt$. Для этого мы докажем несколько более общий факт.

$$Ax = \int_a^b B(t)x(t)\,dt,\quad x(t)\in C[a,b],\ B\in L_p[a,b],\ p>1$$

$$|Ax| \le \underbrace{\max x(t)}_{\|x\|}\int_a^b |B(t)|\,dt \Rightarrow \|A\| \le \int_a^b |B(t)|\,dt$$

Сгладим sgn и подставим в A. Сглаживание:

$(\operatorname{sgn} B)_\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\lambda)\,\omega_\rho(\lambda)\,d\lambda$, она уже непрерывна; $|(\operatorname{sgn} B)_\rho| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sgn}(B(t+\lambda))\,\omega_\rho(\lambda)\,d\lambda| \le$

$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\omega_\rho(\lambda)\,d\lambda = 1.$

Тогда $\|A\| \ge |A(\operatorname{sgn} B)_\rho| = \int_a^b B(t)(\operatorname{sgn} B)_\rho\,dt \longrightarrow$

$\longrightarrow \int_a^b |B(t)|\,dt$, если $B\in L_p[a,b]$, $p>1$.

Значит, $\|A\| = \int_{+\alpha}^{b} |B(t)|\,dt$

§2 Обратные операторы.

Опр. X, Y - норм, $A: X\to Y$; $A^{-1}_л$ - левый обратный к A, если $A^{-1}_л: Y\to X$, $A^{-1}_л A = E$.

Опр. $A^{-1}_п: Y\to X$ - правый обратный к A, если $AA^{-1}_п = E$.

Утв. Если $\exists A^{-1}_л, A^{-1}_п$, то $A^{-1}_л = A^{-1}_п \equiv A^{-1}$ - обратный оператор.

Д-во $AA^{-1}_п = E$; $A^{-1}_л(AA^{-1}_п) = A^{-1}_л \Rightarrow A^{-1}_п = A^{-1}_л$

ЛЕКЦИЯ # 28

10.12.09

Лемма. Следующие три утверждения эквивалентны:

1) Ур-е $Ax = y$ если имеет, то только 1 решение.
2) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$
3) $\exists A^{-1}_л$

D-во 1) ⇒ 2) Пусть $Ax=0$, $x\neq 0$. $Ax_1=y \Rightarrow A(x_1+x)=y$ (?!)

2) ⇒ 3) $y\in R(A)$ - область значений A; тогда $\exists! x\in X$,

$Ax=y$, а x - единственный ($\ker A = 0$) $\Rightarrow x = A_\Lambda^{-1} y$

3) ⇒ 1) $Ax=y$, $A\tilde{x}=y$; $A(x-\tilde{x})=0$. Подействуем

$A_\Lambda^{-1} A(x-\tilde{x})=0 \Rightarrow x=\tilde{x}$. Ч.Т.D.

Лемма Следующие три утв. эквивалентны:

1) $Ax=y$ имеет решение $\forall y$.

2) $R(A)=Y$.

3) $\exists A_\Pi^{-1}$.

D-во 1) ⇒ 2) Очевидно!

2) ⇒ 3) $\forall y\in Y\ \exists x\in X$, $Ax=y$. Как хотим, так и составляем A_Π^{-1} (т.е. он не единственен)

3) ⇒ 1) $x=A_\Pi^{-1}y$: $Ax=A\cdot A_\Pi^{-1}y=y$ Ч.Т.D.

Пример. $A=\frac{d}{dt}$; $X=C^1[0,1]$; $\|x\|_{C^1}=\|x\|_C+\|x'\|_C$; $Y=C[0,1]$

$\frac{dx}{dt}=y(t)$; $x(t)=\int_0^t y(\tau)d\tau$; $A\int_0^t y(\tau)d\tau=y(t)$

Тогда $A_\Pi^{-1}(y)=\int_0^t y(\tau)d\tau$. Проверим на левость: $A_\Pi^{-1}A \overset{?}{=}$

$\int_0^t \frac{dx}{d\tau}d\tau = x(t)-x(0)\neq x(t)$, $x(0)\neq 0$.

• Нас интересуют уравнения $Ax=y$, $x\in X$, $y\in Y$

Опр $A: X\to Y$ наз-ся обратимым, если ур-е $Ax=y$ имеет только одно решение $\forall y\in Y$, и решение устойчиво к изменению y ($\exists A^{-1}$, $\|A^{-1}\|<\infty$) A-огр.

Теорема. Пусть $A: X\to Y$, X-банахово, Y-линейное, нормир.; $\exists M>0$, т.ч. $\|Ax\|\geq M\|x\|\ \forall x\in X$; $\overline{R_A}=Y$. Тогда A - обр. операт.

D-во $Ax\geq M\|x\| \Rightarrow \ker A=\{0\} \Rightarrow \exists A_\Lambda^{-1}$; $R(A)\overset{?}{=}Y$. $\forall y\in Y \Rightarrow$

$\exists y_n\in R(X)$, $\|y_n-y\|\to 0 \Rightarrow \exists x_n\in X$, $Ax_n=y_n$.

$\|y_n - y_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \geq m\|x_n - x_m\| \Rightarrow \|x_n - x_m\| \to 0.$

$\Rightarrow \exists x,\ x_n \to x$; $Ax_n = y_n$; переходя к пределу,

$Ax_n = y_n \to Ax = y \Rightarrow y \in R(A) \Rightarrow \exists A^{-1}_{\text{п}} \Rightarrow \exists$ обр. оп.

$m\|x\| \leq \|Ax\| = \|y\|$; $m\|A^{-1}y\| \leq \|y\|\ \forall y \Rightarrow A^{-1}$ огр.

оператор, $\left(\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}\right)$ Ч.Т.Д.

Б.3 Обратимые операторы.

Теорема. X – банахово, $A: X \to X$. $\|A\| < 1$. Тогда оператор $E - A$ – обратимый оператор.

Д-во. Введем послед-ть $S_n = E + A + A^2 + \ldots + A^n$; он, очевидно, ограничен. $\|S_{n+m} - S_n\| = \|A^{n+m} + \ldots + A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+m} + \ldots + \|A\|^{n+1} \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|} < \varepsilon \Rightarrow S_n$ – ~~огр~~ фундаментальна.

$S_n \in L(X \to X)$ – полное пр-во, пусть $S_n \to S \in L(X, X)$

$S_n(E - A) = E - A^{n+1}$; $(E - A)S_n = E - A^{n+1}$. Устремим n к ∞: $S(E - A) = E$, $(E - A)S = E \Rightarrow$

$S = (E - A)^{-1}$; $\|S\| \leq \|E\| + \|A\| + \|A^2\| + \ldots \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$ Ч.Т.Д.

Следствие. $\|(E - A)^{-1} - E\| \leq \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}$

Теорема $A: X \to Y$; A – обратимый оператор; X – банахово, Y – лин. нормир., $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, то B – обратим.

Д-во $B = A + (B - A) = A(E - A^{-1}(A - B))$; $\|A^{-1}(A - B)\| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (E - A^{-1}(A - B))$ – обратим $\Rightarrow B^{-1} = (E - A^{-1}(A - B))^{-1} A^{-1}$

Ч.Т.Д.

Следствие. Множество обр. операторов в $L(X, Y)$ открыто

Теорема. Пусть $A: X \to Y$, X – банахово, A – обратим. оператор, $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\|A_n - A\| \to 0$; тогда $\exists N: \forall n > N$

A_n - обратимо, и $\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Док-во. $\exists N, n > N$ A_n - обр - следует из пред теоремы;

$A_n = A + (A_n - A) = A(E + A^{-1}(A_n - A)) \Rightarrow A_n^{-1} = (E + A^{-1}(A_n - A))^{-1} A^{-1}$; $A_n^{-1} - A^{-1} = (E - A^{-1}(A_n - A))^{-1} A^{-1} - A^{-1} =$

$= [[E - A^{-1}(A_n - A)]^{-1} - E] A^{-1}$; $\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \leq$

$\leq \|A^{-1}\| \cdot \|A^{-1}(A - A_n)\| \cdot \frac{1}{1 - \|A^{-1}(A - A_n)\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A_n - A\|}{1 - \|A\| \cdot \|A_n - A\|}$

что стремится к 0. Ч.Т.Д.

§4 Теорема Банаха о обратном операторе

Теорема (Банаха) Пусть A - линейный огр. оператор из X в Y, взаимно однозначный, $D(A) = X$ (обл. опр.), $R(A) = Y$, X, Y - банаховы.

Тогда $\exists A^{-1}$ - лин., огр.

Док-во. Лемма. Пусть B - линейный, из X в Y, X - банахово, $D(B) = X$, Y - лин. нормир. Пусть $R_n = \{x \in X : \|Bx\| \leq n\|x\|\}$.

Тогда $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, и $\exists \tilde{X} \subset X$, $\overline{\tilde{X}} = X$, B на $\tilde{X}$ - огр. оператор: $\|Bx\| \leq c\|x\|$ $\forall x \in \tilde{X}$.

Док-во. $\forall x \in X$ $x \in D(B) \Rightarrow \|Bx\| < \infty$, $x \neq 0$: $\frac{\|Bx\|}{\|x\|} < \infty$,

$\exists n$: $\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq n \Rightarrow x \in R_n \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$,

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{R_n}$. Т.к. X - полное, то по т. Бэра $\Rightarrow$

$\exists \overline{R_n}$, т.ч. $\exists B_{\tilde{r}}(\tilde{x}_0) \subseteq \overline{R_n}$, $\exists x_0$, $\exists r < \tilde{r}$, т.ч.

$\overline{B_r(x_0)} \subseteq B_{\tilde{r}}(\tilde{x}_0) \subseteq \overline{R_n}$. $\overline{B_r(x_0) \cap R_n} = \overline{B_r(x_0)}$;

$\exists \|x\| = r$; $\xi = x_0 + x \in \overline{B_r(x_0)} \Rightarrow \exists \xi_k \in R_n \cap B_r(x_0)$,

$\|\xi_k - \xi\| \to 0$; $\xi_k = x_0 + x_k \Rightarrow x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Покажем, что x_k оператор ограничен. $Bx_k = B(\xi_k - x_0) =$

$= B\xi_k - Bx_0 \Rightarrow \|Bx_k\| \leq \|B\xi_k\| - \|Bx_0\| \leq n \cdot$

$\cdot \|\xi_k\| + n\|x_0\| = n(\|x_0 + x_k\| + \|x_0\|) \leq n(\|x_k\| +$

$+2n \cdot \|x_0\| = n\|x_k\| + 2n \dfrac{\|x_k\|}{\|x_k\|} \|x_0\| \leq$ } при больших k $\|x_k\| \geq \frac{2}{2}$

$\leq \left(n + 2n\|x_0\| \cdot \frac{2}{2}\right)\|x_k\| = \|x_k\| \cdot C \ \forall k$.

Значит, верно и $\forall x$. Ч.Т.Д.

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 29}}$

$\mathrm{Im}\, A = Y \Rightarrow \exists A^{-1}_{п}$, взаимно одн $\Rightarrow \mathrm{Ker}\, A = \{0\} \Rightarrow \exists A^{-1}_{л} \Rightarrow \exists A^{-1}$.
$B = A^{-1}: Y \to X$. Возьмём $\xi \in Y, \xi \neq 0, \ l = \|\xi\|$. По лемме,
$\exists \tilde{Y} \subset Y, [\tilde{Y}] = Y \Rightarrow \exists \xi_1 \in \tilde{Y}, \|\xi_1\| \leq l; \ \|\xi - \xi_1\| = \frac{l}{2} \Rightarrow$
по лемме для $(\xi - \xi_1)$ $\exists \xi_2 \in \tilde{Y}, \|\xi_2\| \leq l/2$ и $\|\xi - \xi_1 - \xi_2\|$
$\leq \frac{l}{2^2}$ и т.д. $\|\xi - \xi_1 - \ldots - \xi_n\| \leq \frac{l}{2^n}$, $\|\xi_n\| \leq \frac{l}{2^n}$, $\|B\xi_k\| \leq C\|\xi_k\|$
$\Rightarrow \xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots$; $A^{-1}\xi = x$, а $A^{-1}\xi_n = x_n$. Покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$. $x_n = A^{-1}\xi_n = B\xi_n \Rightarrow \|x_n\| \leq \|B\xi_n\| \leq$
$\leq C\|\xi_n\| \leq \frac{Cl}{2^{n-1}} \Rightarrow$ ряд сх. по Даламберу $\Rightarrow X$-полное $\Rightarrow$
$\Rightarrow \tilde{x} = x_1 + x_2 + \ldots + \ldots \Rightarrow A\tilde{x} = Ax_1 + Ax_2 + \ldots = \xi_1 + \ldots + \xi_n + \ldots = \xi \Rightarrow A\tilde{x} = \xi$
$Ax = \xi \Rightarrow \tilde{x} = x$ (взаимоодн.) $x = A^{-1}\xi = x_1 + \ldots + x_n + \ldots \Rightarrow$
$\|A^{-1}\xi\| \leq \|x_1\| + \ldots + \|x_n\| \leq \frac{Cl}{2^0} + \frac{Cl}{2^1} + \frac{Cl}{2^2} + \ldots + \frac{Cl}{2^{n-1}} = 2Cl = 2C\|\xi\|$
$\Rightarrow \|A^{-1}\| \leq 2C$. Ч.Т.Д.

__Следствие.__ X-лин. норм, заданы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, X-полно отн. обеих.
$\exists M > 0: \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \ \forall x \in X \Rightarrow \exists m > 0 \ \|x\|_1 \leq m\|x\|_2$

__Д-во.__ $E: X_1 \to X_2$, $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$. По условию
$\|Ex\|_2 \leq M\|x\|$, т.е. E-огр. $\Rightarrow \exists E^{-1}$-огр. $: X_2 \to X_1 \Rightarrow$
$\exists m > 0: \|x\|_1 \leq m\|x\|_2$. Ч.Т.Д.

__Опр.__ Лин. опер. $A: X \to Y$ наз-ся замкнутым, если $\forall x_n \in \mathcal{D}(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$, следует, что $x \in \mathcal{D}(A)$, и $Ax = y$.

__Опр.__ График оператора $A: \Gamma(A) = (x, Ax)$, $x \in \mathcal{D}(A)$.

Утв. A-замкн $\Leftrightarrow$ $\Gamma(A)$-замкн. в $\|\cdot\| = \|x\| + \|Ax\|$

Теорема (о замк. графике). X, Y – полные лин. пр-ва, $A: X \to Y$, $\mathcal{D}(A) = X$, A – замк. оператор $\Rightarrow$ A ограничен.

Д-во $X_1 = (X, \|x\| + \|Ax\|)$, $X_2 = (X, \|x\|)$, $\|x_2\|_2 = \|x\| \leq \|x\|_1 = \|x\| + \|Ax\|$. X_2 – полное по условию, полнота X_1 следует из замк. A. $\|x_n - x_m\|_1 \overset{\text{ф.п.}}{=} \|x_n - x_m\| + \|Ax_n - x_m\|$

$\|x_n - x_m\| \to 0$, $\|Ax_n - Ax_m\| \to 0 \Rightarrow \exists x, y: \begin{matrix} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{matrix} \overset{\text{зам.}}{\Rightarrow}$

$\exists x \in D(A) = X$, $Ax = y \Rightarrow \|x_n - x\|_1 \to 0$

По след. из т. Банаха $\|x\| \leq m\|x\|_2 = m\|x\| \Rightarrow A$ огр.

Ч.Т.Д.

§5 Теорема Хана-Банаха.

Теорема. X-лин. норм, $\tilde{X}$-лин. подпр-во X, $f(x)$ – линейный огр. функционал, $\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ $\forall x \in \tilde{X}$, $f: \tilde{X} \to \mathbb{R}$. Тогда $\exists$ продолжение ф-ла f на всё X с сохр. нормы, т.е. $\exists F(x)$, заданный на X, линейный, $\|F(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ $\forall x \in X$, $F(x) = f(x)$ $x \in \tilde{X}$.

Д-во. Д-м в случае сепарабельности X. $x = x' + \alpha x_0$, $x_0 \notin \tilde{X}$, $x' \in \tilde{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $F(x) = F(x') + \alpha F(x_0) = f(x') + \alpha \cdot c$, $c = F(x_0)$

$F(x' + \alpha x_0) = f(x') + \alpha c$, $x' \in \tilde{X}$. Если $\alpha > 0$, то должно быть: $|F(x' + \alpha x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x' + \alpha x_0\|$, $f(x') + \alpha c \leq \|f\| \cdot \|x' + \alpha x_0\|$, $f\left(\frac{x'}{\alpha}\right) + c \leq \|f\| \cdot \left\|\frac{x'}{\alpha} + x_0\right\| \Rightarrow$

$\Rightarrow c \leq \|f\| \cdot \|x_1 + x_0\| - f(x_1)$, $\forall x_1 \in \tilde{X}$.

Если же $\alpha < 0$, $f(x') + \alpha c \leq \|f\| \cdot \|x' + \alpha x_0\|$, $f\left(-\frac{x'}{\alpha}\right) -$

$-C \leq \|f\| \cdot \|\frac{x'}{-2} - x_0\| \Rightarrow C \geq f(x_2) - \|f\| \cdot \|x_2 - x_0\| \ \forall x_2 \in \tilde{X}$

$\Rightarrow f(x_2) - \|f\| \cdot \|x_2 - x_0\| \leq C \leq \|f\| \cdot \|x_1 + x_0\| - f(x_1) \ \forall x_1, x_2 \in \tilde{X}$

$f(x_2) - \|f\| \cdot \|x_2 - x_0\| \leq \|f\| \cdot \|x_1 + x_0\| - f(x_1) \Rightarrow$

$f(x_1 + x_2) \leq \|f\| \cdot (\|x_1 + x_0\| + \|x_2 - x_0\|)$, что верно, т. к.

$f(x_1 + x_2) \leq \|f\| \cdot \|x_1 + x_2\| \leq \|f\| (\|x_1 + x_0\| + \|x_2 - x_0\|) \Rightarrow \exists C$

Итак, $|F(x' + \alpha x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x' + \alpha x_0\| \ \forall \alpha, \forall x_0$, т.к.

$F(-x) \leq \|f\| \cdot \|-x\| = \|f\| \cdot \|x\| \Rightarrow F(x) \geq -\|f\| \cdot \|x\|$. Пусть $X' = \{x_1 \dots x_n\}$ –

счетное вс. плот. мн-во; $M = \mathrm{lin}\, X'$ $\forall x \in X \ \exists z_k \in M: z_k \to x$.

$|f(z_k) - f(z_n)| = |f(z_k - z_n)| \leq \|f\| \cdot \|z_k - z_n\| \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{f(z_k)\}$ – ф.п. $\Rightarrow \exists \lim f(z_k) = f(x)$ Ч.Т.Д.

ЛЕКЦИЯ # 30

15.12.09

Следствие 1. Пусть $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Тогда $\exists$ лин. огр. ф-л $f(x)$, заданный на X, $f(x_0) = \|x_0\|$, $\|f\| = 1$.

Д-во. $\tilde{X} = \{x' = \alpha x_0\}$ – линейное подпр-во X. На $\tilde{X}$ определим

$f(x') = \alpha \|x_0\|$, $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| \Rightarrow \|f\| = 1$. По т. Хана-Банаха, сущ. $F(x)$, зад. на X, и $F(x') = f(x')$ на X,

$\|F\| = \|f\| = 1$. Ч.Т.Д.

Следствие 2. Пусть M – лин. замк. подпр-во X; $x_0 \notin M$, $x_0 \in X$.

Тогда $\exists$ лин. огр. ф-ла $f(x)$, заданный на X, т.ч.

$f(x') = 0 \ \forall x' \in M$, $f(x_0) = 1$.

Д-во. Определим $\tilde{X} = \{x = x' + \alpha x_0, x' \in M, \alpha \in \mathbb{R}\}$; положим $f(x) =$

$= f(x' + \alpha x_0) = \alpha \Rightarrow$ линейный; проверим ограниченность.

$$\sup_{\substack{x' \in M \\ \alpha \in \mathbb{R}}} \frac{|f(x' + \alpha x_0)|}{\|x' + \alpha x_0\|} = \sup \frac{|\alpha|}{\|x' + \alpha x_0\|} = \sup \frac{1}{\|-\frac{x'}{\alpha} - x_0\|} =$$

$$= \frac{1}{\inf\limits_{x' \in M} \|x' - x_0\|} > 0, \text{ т.к. } \inf_{x' \in M} \|x' - x_0\| \geq d > 0, \text{ т. к. если}$$

$\inf \|x' - x_0\| = 0 \Rightarrow x_n' \in M,\ x_n' \to x_0 \Rightarrow x_0 \in M$ (?!) Ч.Т.D

§6 Пр-ва X^* и X^{**}.

Опр. Пр-во лин. огр. ф-л над X наз-ся $X^* = \mathcal{L}(X \to \mathbb{R})$.

• Отметим, что X^* - полное, ибо $\mathbb{R}$ - полное.

Теорема. Если X^* сепарабельно, то X - сепарабельно

D-во. Р-м сферу $\|x^*\| = 1$, $x^* \in X^*$. На сфере $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$, $\|x_n^*\| = 1$ всюду плотное мн-во. $\|x_n^*\| = 1 \Rightarrow \sup\limits_{\|x\|=1} |x_n^*(x)| = 1 \Rightarrow \exists$ $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$, и $\|x_n^*(x_n)\| > 1/2$. Р-м $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, нами выбранные, и р-м линкомбы $r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n$, $r_k \in \mathbb{Q}$. Р-м $M = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,\ \alpha_k \in \mathbb{R}\}$, $\overline{M}$ - замыкание M. Если $\overline{M} = X$, то всё док-но; иначе, $\overline{M} \neq X$, берём $x_0 \notin \overline{M}$, $x_0 \neq 0$. По след 2, $\exists$ ф-л x_0^*, $\|x_0^*\| = 1$, $x_0^*(x_0) \neq 0$, $x_0^*(x') = 0$ $\forall x' \in \overline{M}$; $0 = |x_0^*(x_n)| = |(x_0^* - x_n^*)(x_n) + x_n^*(x_n)| \geq |x_n^*(x_n)| - |(x_0^* - x_n^*)(x_n)| > \frac{1}{2} - \|x_0^* - x_n^*\| \cdot \|x_n\| \geq \frac{1}{2}$ (?!)

$\|x_n\| = 1$; $\|x_0^* - x_n^*\|$ — можно сделать сколь угодно малым за счёт сепар-ти

$\Downarrow$

$\overline{M} = X$. Ч.Т.D.

Пример. Р-м ℓ_p. $x = (x_1 \ldots x_n \ldots)$; $f(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty x_k y_k$, где $y = (y_1 \ldots y_n) \in \ell_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ограниченность:

$$|f(x)| \leq \left(\sum |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_k|^q\right)^{1/q} = \|x\|_{\ell_p} \cdot \|y\|_{\ell_q}$$

Утв. $\forall f \in \ell_p^*\ \exists!\ y \in \ell_q$, т.ч. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty x_k y_k$, $\|f\| = \|y\|_{\ell_q}$

D-во. Положим $P_n(x) = \{x_1, \ldots, x_n, 0 \ldots 0\}$; $e_k = (0 \ldots \overset{k}{1} \ldots 0)$, $f(e_k) = y_k$. Ф-л $f(P_n x) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, положим $x_k = |y_k|^{q-1} \operatorname{sgn} y_k$.

$f(P_n x) = |y_1|^q + \ldots + |y_n|^q$. Р-м $\tilde{x} = (|y_1|^{q-1} \operatorname{sgn} y_1,$

$\ldots, |y_n|^{q-1} \operatorname{sgn} y_n, \ldots)$. С другой стороны, $|f(P_n \tilde{x})| \leq$
$\leq \|f\| \cdot \|P_n \tilde{x}\| = \|f\| \left(|y_1|^{\overbrace{(q-1)p}^{=q}} + \ldots + |y_n|^{(q-1)p} \right)^{1/p} =$
$= \|f\| \cdot \|P_n(y)\|_{l_q}^{q/p}$; $\|P_n y\|_{l_q}^q \leq \|f\| \cdot \|P_n y\|_{l_q}^{q/p} \Rightarrow$
$\Rightarrow \|P_n y\|_{l_q}^{q-\frac{q}{p}} \leq \|f\| \Rightarrow \|P_n y\|_{l_q} \leq \|f\| \ \forall n \Rightarrow n \to \infty,$
значит $\|y\|_{l_q} \leq \|f\|$; $\|f\| \leq \|y\|_{l_q} \Rightarrow \|f\| = \|y\|$. Ч.Т.Д.

Отметим, что сказанное верно и для L_p: $\forall f \in L_p^* \ \exists y \in L_q$, т.ч. $f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x(t) y(t) \, d\mu$, $\|f\| = \|y\|_{L_q}$.

L_1 - сепарабельно (лин. полиномы); $L_1^* = L_\infty$ (пр-во огр. измер. ф-й). Однако $L_\infty^* \neq L_1$, ибо оно не сепарабельно. $x_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \alpha \\ 0 & \alpha \leq t < 1 \end{cases}$: $\sup(x_\alpha(t) - x_\beta(t)) = 1$ при $\alpha \neq \beta$;

Опр. $X^{**} = (X^*)^*$.

$\pi(x)$ - ф-л; $x^*(x)$; фиксируем x: $(\pi x) x^* = \pi_x x^*$.

Очевидно, что он линеен, ограничен: $|\pi x(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|$
$\Rightarrow \|\pi(x)\| \leq \|x\|$; $\pi \cdot x \in X^{**}$

Ут-в. $\|\pi x\| = \|x\|$.

Д-во Из следствия т. Хана-Банаха: $\exists$ лин. огр. ф-л $f(x)$, $\|f\| = 1$,
$f(x) = \|x\|$. $\|\pi_x x\| \geq \pi_x f \big| \cdot \underbrace{\|f\|}_{1} = \|x\| \Rightarrow \|\pi_x\| = \|x\|$. Ч.Т.Д.

Опр. Если X^{**} содержит только π_x ($\pi X = X^{**}$), то X - рефлексивное пр-во.

Пример. L_1 - не рефлексивно. L_p, l_p $(p > 1)$ - рефлексивны.

§7 Слабая сходимость.

Опр. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in X$, наз-ся слабо сх. к X, если $X^*(x_n) \to$
$\to X^*(x) \ \forall x^* \in X^*$.

Пример. Если $\|x_n - x\| \to 0$, то $x_n \xrightarrow{сл} x$, ибо $|x^*(x_n) - x^*(x)| = |x^*(x_n - x)| \le \|x^*\| \, \|x_n - x\| \to 0$. Обратное не верно: рассмотрим "орты" e_k.

Опр. $\{x_n\}$ слабо ф-на в X, если $\forall x^* \in X^*$ $\{x^*(x_n)\}$ ф-на.

Опр. X слабо полное, если $\forall$ сл.-ф-я – слабо сх-ся.

Теорема. Если $\{x_n\}$ сл. ф-на, то $\exists M > 0$, $\|x_n\| \le M$ $\forall n$

Д-во. $x^*(x_n)$ сход $\Rightarrow \overline{\lim} |x^*(x_n)| < \infty$; $x^*(x_n) = \pi x_n(x^*)$

$\overline{\lim} \|A_n x^*\| < \infty$ $\forall x^* \in X^*$ – полное $\Rightarrow$ по т. Банаха–Штейнгаузена: $\exists M$: $\|A_n\| \le M$, $\|A_n\| = \|\pi x_n\| = \|x_n\| \le M$ Ч.Т.Д.

Теорема. Если X рефлексивно, то X – слабо полное.

Д-во. Пусть x_n – слабо фунд; $|x^*(x_n) - x^*(x_m)| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ $\forall x^* \in X^*$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n) = f(x^*)$ – очевидно, что $f(x^*)$ линейн. над X^*; д-м ограниченность. $f(x^*) = \lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n) = \pi x_n(x^*)$; $|f(x^*)| \le \lim \|\pi x_n\| \cdot \|x^*\| \le M \|x^*\|$, т.к. $\|\pi x_n\| \le \|x_n\| \le M$ (из пред. т-мы). Значит, $f(x^*) \in X^{**} = \pi X$. $\Rightarrow \exists x \in X$, $f(x^*) = \pi x(x^*) = x^*(x) \Rightarrow x$ = слабый предел $\{x_n\}$. Ч.Т.Д.

Теорема. X – сепарабельно и рефлексивно, тогда из $\forall$ огр. п-ти $\{x_n\} \subset X$ можно выбрать слабо сх-ся п/п.

Д-во. $\pi X = X^{**}$; из сепараб. $X \Rightarrow$ сепар. X^{**}; $\Rightarrow X^*$ сепарабельно. Пусть $\{x_k^*\}$ – счетное всюду плотное X^*.

1) x_1^*, $|x_1^*(x_n)| \le \|x_1^*\| \cdot \|x_n\| \le M \cdot \|x_1^*\| \Rightarrow \exists$ числовая п/п $x_1^*(x_{1n})$ сход.

2) $x_2^*(x_{1n})$ – огр $\Rightarrow \exists$ сх. п/п $x_2^*(x_{2n})$

и т.д.

В рез. слабо сход. возьмём $z_n = x_{nn}$; $\forall x_k^*$ $x_k^*(z_n)$ сход

как числовая. Берём произвольные $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$. $|x^*(z_n) -$
$- x^*(z_m)| = |x^*(z_n - z_m)| = |(x^* - x_k^*)(z_n - z_m) + x_k^*(z_n - z_m)|$
$\leq \|(x^* - x_k^*)\| \cdot \|z_n - z_m\| + \|x^*(z_n - z_m)\| < \varepsilon.$ $n, m > N$, k-фикс.
$\Rightarrow z_n$ слабо фунд. $\Rightarrow X$ - рефл, значит z_n - сход. Ч.Т.Д.